**CAPÍTULO 4**

**SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES**

4.1 INTRODUÇÃO

Um dos principais tópicos da Álgebra Linear são o estudo de sistemas de equações lineares e suas soluções. Na prática, surgem muitos problemas que podem ser reduzidos a um sistema de equações lineares. Muitos deles, com muitas equações, que requerem um método sistemático para resolvê-los.

**DEFINIÇÕES BÁSICAS**

(1) *Equação linear e soluções*: uma *equação linear* nas *incógnitas* *x*1, *x*2, ..., *x*n é uma equação que pode ser colocada na forma padrão:

*a*1*x1 + a*2*x*2 *+ ... + a*n*x*n *= b* (4-1)

onde *a1, a2,..., an*, e *b* são constantes conhecidas. As constantes *ak* são chamadas de *coeficientes das incógnitas* e *b* é o termo constante ou *termo independente*. As variáveis *x1, x2, ..., xn* são chamadas de incógnitas. Se *b = 0* a equação é dita *homogênea*.

Uma *solução* da equação linear é uma lista de valores para as incógnitas ou, de modo equivalente, um vetor ***x*** no *Rn*, ou seja:

*x1 = k1, x2 = k2, ..., xn = kn*  ou ***x*** *=* (*k1, k2, ..., kn*)

OBSERVAÇÃO: a equação assume implicitamente que há uma *ordem nas incógnitas*, que, em geral, são listadas na forma de um *vetor coluna* ***x***.

Exemplo 1: Dada a equação linear *x + 2y – 3z = 0*, então *x = 5, y = 2* e *z = 3*, ou equivalentemente,

***x*** *=* (*5, 2, 3*) é uma solução desta equação. Por outro lado, o vetor ***x*** *=* (*1, 2, 3*) não é uma solução dessa equação.

Exemplo 2: As equações mostradas a seguir não são lineares:

*x + 3y2 = 4, 3x + 2y – xy = 5, sen*(*x*) *+ y = 0*

Exercício: Encontre uma equação linear em *x* e *y* cujo vetor solução é ***x*** *=* (*5 + 2t, t*)*,* onde *t* é um parâmetro.

(2) *Sistema de equações lineares*: uma *coleção finita* de equações lineares é denominada de um *sistema de equações lineares* ou, simplesmente, um *sistema linear*. Por exemplo, o conjunto de equações:

*x1 – x2 + 2x3 = –3*

*2x1 + x2 + x3 = 0*

é um sistema linear de duas equações a três incógnitas.

OBSERVAÇÃO: A *solução de um sistema* é o conjunto de valores das incógnitas que satisfaz a todas as equações do sistema. Por exemplo, no sistema anterior, uma das possíveis soluções é ***x*** *=* (*–2, 3, 1*).

Em geral, um sistema linear de *m* equações a *n* incógnitas é representado da forma seguinte:

*e1: a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn = b1*

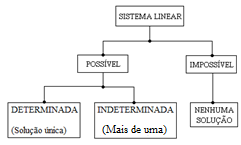
*e2: a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn = b2*

*.....................................................*

*em: am1x1 + am2x2 + ... + amnxn = bm*

Teorema: Qualquer sistema linear tem (a) *solução única*, (b) *nenhuma solução* ou (c) *infinitas soluções*.

Estas situações são mostradas na figura 4-1.



**Fig. 4-1: Alternativas de solução de um sistema.**

(3) *Matriz dos coeficientes e matriz associada*

*Matriz dos coeficientes* é a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear, ou seja:

 (4-2)

*Matriz associada ou matriz aumentada* é a matriz formada pelos coeficientes, acrescida de mais uma coluna determinada pelos termos constantes *b*i, ou seja,

 (4-3)

(4) *Equações lineares degeneradas*: uma equação linear é dita *degenerada* se todos os seus coeficientes são nulos, ou seja, se ela é da forma:

*0x1 + 0x2 +... + 0xn = b* (4-4)

Teorema: Seja um sistema linear que possui uma equação degenerada *ek*, com termo constante *bk*, então:

(i) Se *b ≠ 0*, o sistema não possui solução.

(ii) Se *b = 0*, *Lk* pode ser retirada do sistema.

(5) *Incógnita líder*: seja *ek* uma equação linear não degenerada. A *incógnita líder* é a primeira incógnita de *ek* com coeficiente não nulo.

Exemplo 3: *0x1 + 0x2 + 5x3 – 3x4 – 0x5 + 7x6 = 10* ou simplesmente: *5x3 – 3x4 + 7x6 = 10*

Então, a primeira incógnita com coeficiente não nulo é *x3,* logo ela é a incógnita líder.

Exemplo 4: *0x + 2y – 4z = 8* ou simplesmente *2y – 4z = 8*

Então a incógnita líder é *y.*

(6) *Sistemas equivalentes*: Se uma equação de um sistema é substituída por outra que seja uma combinação linear de pelo menos uma das equações restantes, o novo sistema assim obtido é *equivalente* ao original e, portanto, terá a mesma solução.

Exemplo 5: Seja um sistema linear dado por:

*e1: x1 + x2 + 2x3 = 8*

*e2: –2x1 – 4x2 + 6x3 = 2*

*e3: 3x1  – 7x2 + 4x3 = 10*

Seja multiplicar a equação *e1* por *2*, em seguida somar o resultado com a equação *e2* e o resultado obtido ocupar o lugar da equação *e2*. Este procedimento é denotado por:

*2e1 + e2 → e2*

Então, o novo sistema obtido fica sendo:

*e1: x1 + x2 + 2x3 = 8*

*e2: 0x1 – 2x2 + 10x3 = 18*

*e3: 3x1 – 7x2 + 4x3 = 10*

Desse modo, a nova equação *e2* é uma combinação linear de *e1, l*ogo ela pode substituir qualquer uma das equações do sistema original para se obter outro sistema equivalente e, portanto, os dois terão a mesma solução.

Exercício:

1) Obtenha um sistema equivalente ao primeiro sistema do exemplo 5, realizando a operação

*–3e1 + e3 → e3*

2) Mostre que o vetor ***x*** *= (3, 1, 2)* é solução dos dois sistemas do exemplo 5.

**OPERAÇÕES ELEMENTARES**

As seguintes operações elementares serão de grande utilidade para se obter sistemas lineares equivalentes, visto que elas não alteram sua solução:

[E1] Trocar de posição duas das equações do sistema. Indica-se isto por:

*ei ↔ ej* (Lê-se: Permutar *ei* com *ej*)

[E2] Substituir uma equação por um múltiplo não nulo de si mesma. Indica-se por:

*kei → ei* (Lê-se: *kei* substitui *ei*)

[E3] Substituir uma equação por um múltiplo de outra equação somada a si mesma. Indica-se por:

*kei + ej → ej* (Lê-se: *kei + ej* substitui *ej*)

4.2 SISTEMAS LINEARES COM DUAS OU TRÊS INCÓGNITAS

Encontrar interseções entre retas, ou entre planos ou entre retas e planos envolve a solução de sistemas lineares a duas ou a três incógnitas.

Exemplo 6: seja o sistema linear

*e1: x – y = 1*

*e2: 2x + y = 6*

Realizando a operação elementar [E3], ou seja, *–2e1 + e2 → e2*, obtém-se o sistema equivalente:

*e1: x – y = 1*

*e2: 3y = 4*

Logo, de *e2* encontra-se: *y* = 4/3

E de *e1* tira-se: *x* – 4/3 = 1 ou *x* = 7/3.

Este é um sistema com *apenas uma solução*. Geometricamente a solução ***x*** *=* (*7/3, 4/3*) é o ponto de *interseção entre as retas* representadas pelas equações do sistema. Neste caso as retas são *concorrentes*. Um bom exercício é esboçar o gráfico das duas retas e verificar que o ponto ***x*** é realmente a interseção entre elas.

Exemplo 7: seja o sistema linear

*e1: x + y = 4*

*e2: 3x + 3y = 6*

Realizando a operação *–3e1 + e2 → e2*, obtém-se:

*e1: x + y = 4*

*e2: 0x + 0y = –6*

Neste caso, a equação *e2* é degenerada e inconsistente, portanto *o sistema é impossível* (nenhuma solução). Geometricamente significa que as *retas são paralelas e distintas*, ou seja, as retas possuem a mesma inclinação, porém cortam o eixo *y* em pontos distintos.

Exemplo 8: Seja o sistema linear

*e1: 4x – 2y = 1*

*e2: 16x – 8y = 4*

Realizando a operação *–4e1 + e2 → e2* obtém-se:

*e1: 4x – 2y = 1*

*e2: 0x + 0y = 0*

Neste caso, a equação *e2* é degenerada, porém, consistente e assim, o sistema é possível. A equação *e2* pode ser retirada, ficando o sistema só com a equação *e1*. Faz-se então, *y* como *variável livre* e se expressa *x* em função de *y*. Assim:

*e1: 4x – 2y = 1*

*y = t, x = 1/4 + t/2*

***x*** *=* (*1/4 + t/2, t*) *=* (*1/4, 0*) *+ t*(*1/2, 1*)*, –∞ < t < +∞*

Portanto, o sistema tem infinitas soluções, pois para cada valor de *t* tem-se um vetor ***x*** distinto.

Geometricamente, as retas são coincidentes, ou seja, possuem a mesma inclinação e cortam o eixo *y* no mesmo ponto.

Exemplo 9: Sejam os sistemas abaixo, cujas equações representam planos:

*e1: x – y + 2z = 5 e1: x – y + 2z = 7*

(a) *e2: 2x – 2y + 4z = 10* (b) *e2: 2x – 2y + 4z = 11*

*e3: 3x – 3y + 6z = 15 e3: 3x – 3y + 6z = 18*

No sistema (a), verifica-se que *e2* e *e3* são múltiplas de *e1*. Geometricamente significa que os três *planos coincidem*. Portanto, o sistema tem infinitas soluções que podem ser expressas na forma de equações paramétricas dos planos. Assim, descartando-se as equações *e2* e *e3* e, para *y = t*1 e *z = t*2 na equação *e1*, tem-se:

*x = 5 + t1 – 2t2,y = t1, z = t2*

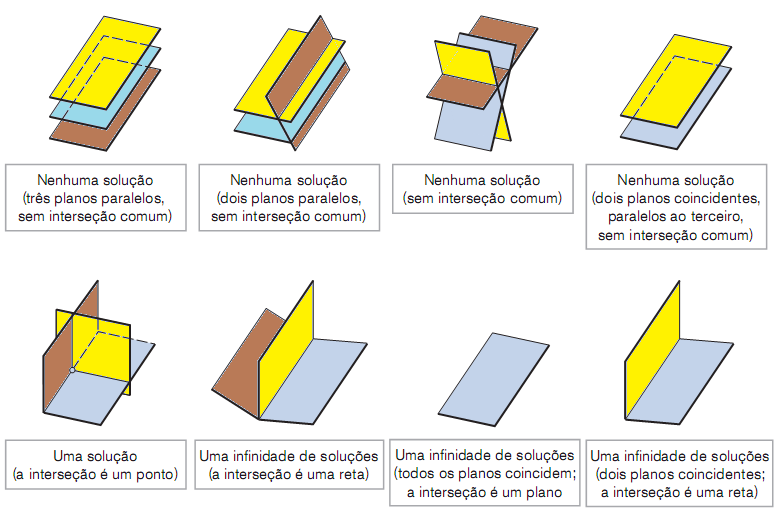
ou ***x*** *=* (*5 + t1 – 2t2, t1, t2*)

ou ainda, como uma combinação linear de vetores:

***x*** *=* (*5, 0, 0*) *+ t1*(*1, 1, 0*) *+ t2*(*–2, 0, 1*).

No sistema (b), os planos são paralelos, mas não coincidentes, então o sistema não tem solução.

Em sistemas a três incógnitas podem ocorrer as seguintes situações, do ponto de vista geométrico, resumidas na figura 4-2.



**Fig. 4-2. Interpretação geométrica de sistemas a três incógnitas**

Exercício: Resolva o sistema abaixo e dê uma interpretação geométrica para a sua solução.

*x – y + 2z = 2*

*2x + y – z = 1*

**Resposta***:* ***x*** *=* (*1 – t/3, –1 + 5t/3, t*)*. Geometricamente é uma reta interseção entre os dois planos*.

4.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES – REDUÇÃO POR LINHA

O principal método de resolução de sistemas lineares é através da *eliminação de Gauss* que consiste em se obter sistemas equivalentes, reduzidos por linha, através das operações elementares vistas anteriormente. Primeiro, seja definir o que é um sistema na *forma escalonada por linha*.

**FORMA ESCALONADA POR LINHA**

É um sistema onde cada incógnita líder de uma equação está à direita da incógnita líder da equação anterior. Este tipo de sistema sempre possui solução que pode ser única ou infinita, determinada pela *substituição retroativa*, conforme exemplos a seguir.

Exemplo 10: O sistema a seguir possui infinitas soluções. Neste caso o sistema possui um número de equações menor do que o número de incógnitas. Neste tipo de sistema destacam-se dois tipos de incógnitas:

*Incógnitas líderes*: *x1, x3* e *x4*

*Incógnitas livres*: são as incógnitas restantes, neste caso: *x2* e *x5*, para as quais se pode atribuir qualquer valor.

*e1: 2x1 + 6x2 – x3 + 4x4 – 2x5 = 7*

*e2: x3 + 2x4 + 2x5 = 5*

*e3: 3x4 – 9x5 = 6*

Assim, podem-se encontrar as incógnitas líderes *x1, x3 e x4* em função das incógnitas livres *x2* e *x5*, utilizando-se a *substituição retroativa*, ou seja, começando da última equação até se chegar à primeira. Portanto:

De *e3*: *x4 = 2 + 3x5*

De *e2*: *x3 = 1 –* 8x5

De *e1*: *x*1 *= – 3x2 – 9x5*

Assim, a solução geral é dada por:

***x*** *=* (*– 3x2 – 9x5, x2, 1 – 8x5, 2 + 3x5, x5*)

Ou fazendo-se *x*2 *= a* e *x*5 *= b*, tem-se a solução na forma paramétrica, ou seja:

***x*** *=* (*– 3a – 9b, a, 1 – 8b, 2 + 3b, b*)

ou ainda, como uma combinação linear de vetores:

***x*** *= (0, 0, 1, 2, 0) + a(–3, 1, 0,0, 0) + b(–9, 0, –8, 3, 1)*

Onde *a* e *b* são escalares quaisquer.

OBSERVAÇÃO: Esta última equação mostra que a solução deste sistema é um plano no *R5*.

Exemplo 11: O próximo sistema também é escalonado por linha, porém possui solução única. Neste caso, o número de equações é igual ao número de incógnitas, e este sistema é dito estar na *forma triangular*, que é uma forma particular da forma escalonada, onde não há incógnitas livres. Portanto terá solução única.

*e1: 2x1 + 3x2 + 5x3 – 2x4 = 9*

*e2: 5x2 – x3 + 3x4 = 1*

*e3: 7x3 – x4 = 3*

*e4: 2x4 = 8*

Novamente, usando-se a substituição retroativa tem-se:

De *e4* encontra-se *x4 = 4*, que substituída em *e3* fornece *x3 = 1*. Substituindo *x*3 e *x*4 em *e2* encontra-se *x2 = –2* e, finalmente, substituindo-se *x*2*, x*3e *x*4 em *e1* encontram-se *x1 = 9*. Então a solução única do sistema é:

***x*** *=* (*9, –2, 1, 4*)

4.4 RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES USANDO MATRIZES

Uma maneira de se resolver um sistema linear é trabalhando com sua matriz associada *M*, esquecendo-se provisoriamente as incógnitas e aplicando as operações elementares vistas no capítulo 3, até chegar a uma matriz na *forma escalonada por linha* ou na *forma escalonada reduzida por linha.* Para se chegar a uma destas formas utiliza-se o procedimento conhecido como eliminação de Gauss-Jordan.

**ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN**

O processo de redução de uma matriz até se chegar à forma *escalonada reduzida por linha* é conhecido como *eliminação de Gauss-Jordan*.

Esta seção apresenta dois algoritmos: um, para se transformar qualquer matriz *A* em sua forma escalonada por linha (eliminação de Gauss) e outro para transformar em sua forma escalonada reduzida por linha (eliminação de Gauss-Jordan).

Algoritmo A1 (Eliminação direta): dada qualquer matriz *A*, este algoritmo insere zeros abaixo de cada pivô, trabalhando de cima para baixo, e dá como resultado a forma escalonada por linha de *A*.

PASSO 1: Descubra a primeira coluna com um elemento não nulo. Seja *j*1 esta coluna.

(a) Se necessário, troque a posição de duas linhas para que o elemento não nulo da coluna *j*1 esteja na primeira linha, isto é, para que *a*1j *≠ 0*

(b) Use *a*1j como pivô para obter zeros abaixo de dele. Especificamente, para *i* *> 1*, faça:

(1)  (2) *kR1 + Ri → Ri*

OBSERVAÇÃO: na equação de *k*, *aij1* é a entrada a ser eliminada. Portanto:

*k = (–entrada a ser eliminada / pivô)*

PASSO 2: Repita o passo 1 para o próximo pivô, eliminando-se as entradas abaixo dele.

PASSO 3: Continua-se o processo acima até que não haja nenhuma entrada a ser eliminada abaixo do pivô. Observe-se que, no final do processo, os pivôs serão*,* *,...,* , onde *r* é o número de linhas não nulas da matriz escalonada por linha.

Algoritmo A2 (Eliminação retroativa): dada uma matriz *A* = [*a*ij] na forma escalonada por linha, com elementos pivôs*,* *,...,* , o resultado deste algoritmo será a forma escalonada reduzida por linha da matriz *A*.

PASSO 1: (a) Multiplique a última linha não nula *Rr* por 1*/arjr* (para que o último pivô seja *1*)

(b) Use *= 1* para obter zeros acima do pivô, realizando a operação: –*Rr + Ri → Ri*.

PASSO 2: Para *r* *– 1* repita o passo 1 para as linhas *Rr-1, Rr-2,..., R2*

Exemplo 12: Resolva os seguintes sistemas lineares através da eliminação de Gauss-Jordan

*x1 + x2 – 2x3 + 4x4 = 5 x1 + x2 – 2x3 + 3x4 = 4 x + 2y + z = 3*

*2x1 + 2x2 – 3x3 + x4 = 3 2x1 + 3x2 + 3x3 – x4 = 3 2x + 5y – z = –4*

*3x1 + 3x2 – 4x3 – 2x4 = 1 5x1 + 7x2 + 4x3 + x4 = 5 3x – 2y – z = 5*

(a) (b) (c)

Solução (a): Aplica-se o algoritmo de Gauss-Jordan na matriz *M*. Assim se tem as seguintes matrizes equivalentes:





A última linha, por ser nula, pode ser excluída, então se fica com o sistema:

*x1 + x2 – 10x4 = –9*

*x3 – 7x4 = –7*

Que pode ser resolvido expressando-se as variáveis líderes em função das livres. Assim:

*x1 = –9 – x2 + 10x4 x3 = –7 + 7x4*

Ou seja, este sistema possui infinitas soluções que podem ser expressas pelo vetor solução:

***x*** *= (–9 – x2 + 10x4, x2, –7 + 7x4, x4)*

ou ainda, fazendo *x2 = t1 e x4 = t2*

***x*** *= (–9, 0, –7, 0) + t1(–1, 1, 0, 0) + t2(10, 0, 7, 1)*

Observe-se que *rank(A) = rank(M)*

Solução (b): Seguindo o mesmo procedimento do item (a), encontra-se a seguinte seqüência de matrizes:



Observe-se que, na última matriz, a última linha corresponde a uma equação degenerada. Então não é preciso continuar já que o sistema não possui solução. Observe que *rank(A) ≠ rank(M)*.

Solução (c): Seguindo o mesmo procedimento dos itens anteriores, encontra-se a seguinte seqüência de matrizes:





Neste caso o sistema possui uma única solução, que corresponde à última coluna destacada na última matriz, ou seja,

*x = 2, y = –1, z = 3* ou ***x*** *= (2, –1, 3)*

Observe-se que *rank(A) = rank(M) = 3* (no de incógnitas).

Exercício: Resolva o sistema a seguir reduzindo a sua matriz aumentada à forma escalonada reduzida por linha.

*x + 4y + 3z = 1*

*2x + 5y + 4z = 4*

*x – 3y – 2z = 5*

**Resposta**: *(3, –2, 2)*

**TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE**

Teorema: Considere um sistema linear a *n* incógnitas com matriz associada *M* e matriz dos coeficientes, *A*, então:

(a) O sistema é possível se, e só se, *rank(A) = rank(M)*

(b) A solução é única se, e só se, *rank(A) = rank(M) = n*

**SISTEMAS LINEARES COM UMA MATRIZ DE COEFICIENTES COMUM**

Em muitas aplicações precisam-se resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes. Então, em vez de se resolver cada sistema separadamente, pode-se aplicar um procedimento melhor formando-se a matriz aumentada:

*M =* [*A|B1|B2| ... |Bk*]

na qual *B1, B2, ..., Bk* são juntadas a *A* para em seguida reduzir a matriz obtida à forma escalonada reduzida por linha pela eliminação de Gauss-Jordan. Com isso resolvem-se todos os *k* sistemas de uma só vez.

Exemplo 13: Considere os sistemas:

*(a) x1 + 2x2 + 3x3 = 4 (b) x1 + 2x2 + 3x3 = 1*

*2x1 + 5x2 + 3x3 = 5 2x1 + 5x2 + 3x3 = 6*

*x1 + 8x3  = 9 x1 + 8x3 = –6*

Então, construindo-se a matriz aumentada pela junção dos dois sistemas, e depois encontrando a forma reduzida por linha tem-se:



Das duas últimas colunas tiram-se as soluções dos sistemas como sendo:

*(a) x1 = 1, x2 = 0 e x3 = 1 (b) x1 = 2, x2 = 1 e x3 = –1*

**(\*) ERRO DE ARREDONDAMENTO E PIVOTAMENTO PARCIAL**

Sistemas de grande escala são resolvidos por eliminação de Gauss-Jordan através de *computadores*, os quais usam *aproximações decimais* para representar valores exatos e com isso introduzem *erros de arredondamento*. Se algumas precauções não forem tomadas, esses erros podem se propagar e degradar a resposta, a ponto de torná-la pouco exata ou até inútil.

Pode ser mostrado que a divisão por números próximos de zero tende a ampliar os erros de arredondamento. Assim, na execução do algoritmo de Gauss-Jordan, onde se utiliza muitas divisões, é comum efetuar uma troca de linhas para colocar a entrada de maior valor absoluto na posição de pivô, antes de dividir tudo para a introdução do pivô. Esse procedimento é denominado de *pivotamento parcial*.

Exemplo 14: Considere o sistema linear

*x/10000 + y = 1*

*x – y = 0*

cuja solução exata é *x = y = 10000/10001*

Mas, se esse sistema for resolvido usando uma calculadora ou um computador que usa aritmética de precisão finita, digamos com quatro dígitos significativos, o sistema ficaria assim

*0,0001x + 1,000y = 1,000*

*1,000x – 1,000y = 0*

Usando a eliminação de Gauss-Jordan, neste sistema, com a limitação de quatro dígitos significativos, encontramos

*x = 0,000, y = 1,000*

que é uma aproximação pobre à solução exata.

Contudo, se fizermos a troca de linhas, encontraremos a resposta praticamente exata, mesmo com a limitação de quatro dígitos significativos, ou seja,

*x = 1,000, y = 1,000*

OBSERVAÇÃO: Uma maneira de arredondar um número para algumas casas decimais significativas consiste em primeiro escrevê-lo em notação exponencial, como *M×10k*, onde *M = 0,d1d2d3 ...*, com *d1* não nulo; arredondamos *M* para a quantidade de casas significativas que queremos e retornamos o resultado para a forma decimal. Por exemplo, com quatro casas decimais significativas, o número *23,58642* arredonda para *23,59*; o número *0,0002358642* arredonda para *0,0002359* e o número *10,001* arredonda para *10,00*.

Exercício: Resolva o sistema abaixo por eliminação de Gauss-Jordan com pivotamento parcial utilizando aritmética de precisão finita com dois dígitos significativos.

*0,21x + 0,33y = 0,54*

*0,70x + 0,24y = 0,94*.

**Resposta**: *x = 1,00; y = 1,00. A solução exata é x = 1 e y = 1*

4.5 FORMA MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR

O sistema genérico de *m* equações a *n* incógnitas é equivalente à seguinte equação matricial:

 (4-5)

Ou, abreviadamente: *AX = B,* ou ainda, como *X* e *B* são matrizes coluna, pode-se vê-los como vetores coluna. Então também se pode escrever o sistema como:

*A****x*** = ***b***

Onde *A* *= [aij]* é a matriz dos coeficientes, *X = [xj]* é matriz coluna das incógnitas e *B = [bi]* é matriz coluna das constantes.

Exemplo 15: Representar na forma de matricial o seguinte sistema:

*x1 + 2x2 – 4x3 + 7x4 = 4*

*3x1 – 5x2 + 6x3 – 8x4 = 8*

*4x1 – 3x2 – 2x3 + 6x4 = 11*

Solução: 

Pode-se verificar que ***x*** *= (3, 1, 2, 1)* é uma solução do sistema.

A equação matricial (3-5) também pode ser escrita como a equação vetorial a seguir:

 (4-6)

Ou também, abreviadamente, como:

***b*** *= x*1***c*1** *+ x2****c*2** *+ ... + x*n***c*n**

onde***b*** é o vetor coluna das constantes e ***c*1***,* ***c*2***, ...* ***c*n** são os vetores coluna da matriz *A*.

Desta forma, a equação vetorial (3-6) tem uma solução se, e só se, o vetor coluna das constantes for uma combinação linear dos vetores coluna da matriz dos coeficientes.

Exercícios:

1) Escreva o vetor ***v*** *= (4, 9, 19)* como combinação linear dos vetores ***u*1** *= (1, –2, 3)*,

***u*2** *= (3, –7, 10)* e ***u*3** *= (2, 1, 9)*. Em seguida determine o sistema linear equivalente bem como sua forma reduzida.

**Resposta***:* ***v*** *= 4****u1*** *– 2****u2*** *+ 3****u3***

2) Expressar o vetor ***v*** *= (2,* *–3, 1, –5)* como uma combinação linear dos vetores ***e1*** *= (1, 0, 0, 0),*

***e2*** *= (0, 1, 0, 0),* ***e3*** *= (0, 0, 1, 0)* e ***e4*** *= (0, 0, 0, 1)*

**Resposta: *v*** *= 2****e1*** *– 3****e2*** *+* ***e3*** *– 5****e4***

4.6 SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Um sistema linear é homogêneo se todos os termos constantes, do lado direito de cada equação, são nulos. Então, sua forma matricial fica:

*A****x*** *=* ***o***

Este tipo de sistema sempre tem uma *solução nula* chamada de *solução trivial*. Ele sempre pode ser escrito na forma escalonada por linha e a questão se resume a determinar as soluções não nulas.

Teorema: Seja *r* o número de equações e *n* o número de incógnitas de um sistema homogêneo na *forma escalonada por linha*. Então:

(i) Se *r = n*, o sistema possui apenas a solução nula.

(ii) Se *r* < *n*, o sistema possui pelo menos uma solução não nula.

Exemplo 16: Determine se cada um dos seguintes sistemas homogêneos possui uma solução não nula.

*x + y – z = 0 x + y – z = 0 x1 + 2x2 – 3x3 + 4x4 = 0*

*2x – 3y + z = 0 2x + 4y – z = 0 2x1 – 3x2 + 5x3 – 7x4 = 0*

*x – 4y + 2z = 0 3x + 2y + 2z = 0 5x1 + 6x2 – 9x3 + 8x4 = 0*

(a) (b) (c)

Solução (a): Encontra-se a forma escalonada:

*x + y – z = 0 x + y – z = 0 Forma escalonada*

*–5y + 3z = 0 –5y + 3z = 0 por linha*

*–5y + 3z = 0*

Então este sistema possui uma solução não nula já que sua forma reduzida tem mais incógnitas do que equações. Por exemplo: se *z* = 5 então, *y* = 3 e *x* = 2. Assim, o vetor ***x*** = (2, 3, 5) é uma das soluções do sistema.

Solução (b): Encontra-se a forma reduzida:

*x + y – z = 0 x + y – z = 0 Forma escalonada*

*2y + z = 0 2y + z = 0 por linha*

*–y + 5z = 0 11z = 0*

Então o sistema possui apenas a solução trivial (solução nula) já que o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Solução (c): O sistema original já possui mais incógnitas do que equações então, obrigatoriamente ele tem uma solução não nula. Não é preciso encontrar a forma reduzida.

4.7 OUTRO MÉTODO DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES

Foi mostrado como se resolver um sistema linear pela redução da matriz aumentada à forma escalonada por linha (eliminação de Gauss). Contudo existem outros métodos importantes de se resolver sistemas lineares que são baseados na ideia de se expressar as *m* equações na forma matricial conforme equação (4-5).

**RESOLUÇÃO POR INVERSÃO DE MATRIZES**

Conforme equação (4-5), pode-se expressar um sistema linear na forma matricial:



ou simplesmente como:

*AX = B* (4-7)

Onde *A* é a matriz dos coeficientes, *X* é a matriz coluna das incógnitas e *B* é a matriz coluna das constantes.

Seja se ocupar principalmente com o caso em que o número de equações é igual ao número de incógnitas e, portanto, a matriz de coeficientes *A* é quadrada. Se, além disso, *A* é invertível, então pode-se resolver a equação (4-7) multiplicando-se essa equação por *A-1* para se obter a *solução única:*

*X = A-1B* (4-8)

Exemplo 17: Considere o sistema linear:

*x1 + 2x2 + 3x3 = 5*

*2x1 + 5x2 + 3x3 = 3*

*x1 + 8x3 = 17*

Esse sistema pode ser escrito na forma da equação (4-8), onde:

e como

A solução do sistema linear é:



Ou, equivalentemente, *x1 = 1, x2 = –1* e *x3 = 2*

**SISTEMA HOMOGÊNEO**

Se o sistema linear é homogêneo, com *m* equações e *m* incógnitas e, se a matriz de coeficientes *A* é invertível, então, o sistema *AX = O* tem somente a solução trivial.

**CONSISTÊNCIA DE SISTEMAS LINEARES**

O problema é: dada uma matriz *A*, encontrar todos os vetores coluna ***b*** para os quais o sistema linear *A****x*** *=* ***b*** é consistente. Tem-se as seguintes alternativas:

1. Se *A* é uma matriz quadrada e invertível, então o sistema *Ax =* ***b*** é consistente para qualquer vetor ***b*** de *Rn*.

1. Se *A* não é quadrada ou se *A* é quadrada, mas não invertível, então o sistema geralmente é consistente para alguns vetores e o problema consiste em determinar esses vetores.

Exemplo 18: Quais condições devem satisfazer *b1, b2* e *b3*, para que o seguinte sistema linear seja consistente?

*x1 + x2 + 2x3 = b1*

*x1 + x3 = b2*

*2x1 + x2 + 3x3 = b3*

Solução: A matriz aumentada é

que pode ser reduzida à forma escalonada por linha como segue:



Da terceira linha da última matriz, é evidente que o sistema tem uma solução se, e só se:

*b3 – b2 – b1* *= 0* ou *b3 = b1 + b2*

Assim, *A****x*** *=* ***b*** é consistente se, e só se, ***b*** pode ser expresso na forma:



onde *b1* e *b2* são arbitrários, ou seja, *A****x*** *=* ***b*** é consistente para todas as combinações lineares dos vetores

 e 

4.8 RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES POR FATORAÇÃO LU

Para se resolver um sistema linear quadrado *A****x*** *=* ***b*** utilizando decomposição *LU*, siga os seguintes passos:

Passo 1: Reescreva o sistema *A****x*** *=* ***b*** como:

*LU****x*** *=* ***b*** (3-15)

Passo 2: Defina a nova variável ***y*** por:

***y*** *= U****x*** (3-16)

e reescreva (3-15) como *L****y*** *=* ***b***

Passo 3: Resolva o sistema *L****y*** *=* ***b*** na variável ***y***

Passo 4: Substitua o vetor ***y*** na equação (3-16) e resolva-a na variável ***x***

Este algoritmo, embora consista em resolver dois sistemas em vez de um, ele não dá mais trabalho do que resolver um só.

Por exemplo, seja a matriz *A* dos coeficientes de um sistema decomposta conforme segue:

 (3-17)

*A* = *L* *U*



*A* ***x*** = ***b***

De (3-17) pode-se reescrever esse sistema como:

 (3-18)

*L* *U* ***x*** = ***b***

Conforme especificado no passo 2, seja definir *y1, y2* e *y3* pela equação:

 (3-19)

*U* ***x*** = ***y***

O que permite reescrever (3-18) como:



*L* ***y*** = ***b***

Ou, equivalentemente, como:

*2y1 = 2*

*–3y1 + y2 = 2*

*4y1 – 3y2 + 7y3 = 3*

Usando-se a substituição de cima para baixo (chamada de substituição para frente), encontra-se:

*y1 = 1, y2 = 5, y3 = 2*

E conforme indicado no passo 4, substitui-se esses valores em (3-19), obtendo-se o sistema linear:

*x1 + 3x2 + x3 = 1*

*x2 + 3x3 = 5*

*x3 = 2*

Resolvendo-se esse sistema por retro substituição encontra-se:

*x1 = 2, x2 = –1, x3 = 2*

Exemplo 19: Seja a eliminação Gaussiana efetuada como uma decomposição *LU*. Para isso toma-se como exemplo o sistema linear:



O procedimento utilizado permite encontrar tanto a decomposição *LU* quanto o vetor ***y*** de (3-19) usando-se operações sobre as linhas da matriz aumentada desse sistema. Assim, tem-se:











Agora, tudo que resta é resolver o sistema *U****x*** *=* ***y*** por retro substituição para encontrar ***x*** como sendo:

***x*** *= (2, –1, 2)T*

(**\***) 4.9 SUBESPAÇOS E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Às vezes, é necessário detectar, dentro de um espaço vetorial *V*, subconjuntos *W* que sejam eles próprios espaços vetoriais “menores”. Tais conjuntos serão chamados de subespaços de *V*. Isto acontece, por exemplo, em: *V = R2*, onde *W* é uma reta deste plano, que passa na origem.

**SUBESPAÇOS DE *Rn***

Um conjunto não vazio de vetores em *Rn* é dito um subespaço de *Rn* se é fechado na multiplicação por um escalar e na soma.

*Definição*: Dado um espaço vetorial *V*, um subconjunto *W*, não vazio, será um *subespaço vetorial* de *V* se as duas condições a seguir forem satisfeitas simultaneamente

(1) Para qualquer, ***u*** *e* ***v,*** *∈ W,* tivermos *(****u*** *+* ***v)*** *∈ W*.

(2) Para qualquer *λ ∈ R*, ***u*** *∈ W,* tivermos *λ****u*** *∈ W*.

Da definição acima podemos fazer três observações

a) Ela garante que ao operarmos em *W* (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de *W*.

b) Qualquer subespaço *W* de *V* precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (ii) quando *α* *= 0*).

c) Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (chamados de triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Teorema: Se *S = {****v1, v2, ..., vk}*** é um conjunto de vetores em *Rn*, então o conjunto de todas as combinações lineares

***x*** *= t1****v1*** *+ t2****v2*** *+ ... + ts****vs*** (4-10)

é um subespaço de *Rn*.

Exemplo 20: *V = R4* e *W = {(0, b, c, d) | b, c e d ∈ R}.* Isto é, *W* é o conjunto dos vetores de *R4*, cujo primeiro componente é nulo. Verifiquemos as condições (1) e (2).

(1) ***u*** *= (0, b1, c1, d1)*, ***v*** *= (0,* *b2, c2, d2) ∈ W*

Então, ***u*** *+* ***v*** *= (0, b1 + b2, c1 + c2, d1 + d2) ∈ W*, pois tem o primeiro componente nulo.

(2) *λ****u*** *= (0, λb1, λc1, λd1)* *∈ W*, pois a primeira coordenada é nula para todo *λ∈ R*.

Portanto, *W* é um subespaço de *R4*.

Exercício: Verifique que uma reta na origem é um subespaço do *R2* e que um plano na origem é um subespaço do *R3*.

**DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR**

Em álgebra linear é fundamental sabermos se um vetor é uma combinação linear de outros, pois se for, este vetor é desnecessário para descrever o espaço gerado pelos demais que não são combinação linear.

*Independência linear*: Seja *V* um espaço vetorial e os vetores

*v1, ..., vn* *∈ V*. Dizemos que o conjunto *{v1, ..., vn}* é *linearmente independente* (*LI*), ou que os vetores *v1, ..., vn* são *LI*, se a equação

*a1v1 + ... + anvn* *=* ***o***

tem apenas a solução trivial, isto é: *a1 = a2 = ... = an* *= 0*.

Isto implica que qualquer um dos vetores desse conjunto não pode ser expresso em função dos vetores restantes.

No caso em que exista algum *ai* *≠ 0* dizemos que o conjunto ou os vetores desse conjunto são *linearmente dependentes* (*LD*).

Teorema: O conjunto de vetores *{****v1, v2, ..., vn****}* é *LD* se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos demais.

Exemplo 21: *V = R3*. Sejam ***v1***e***v2*** ∈ *V*. Então *{****v1, v2****}* é *LD* se, e só se, ***v1***e ***v2*** estiverem na mesma reta que passa pela origem. (***v1*** *=* λ***v2***). Figura 4-8.

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

**Fig. 4-8: Vetores na mesma reta.**

Exemplo 22: *V = R3*. Sejam ***v1, v2*** e ***v3*** *∈ V*. Então *{****v1,v2,v3****}* é *LD* se e só se estes três vetores estiverem no mesmo plano, que passa na origem. Figura 4-9.

Foto em preto e branco

Descrição gerada automaticamente com confiança média

**Fig. 4-9: Vetores no mesmo plano.**

Exemplo 23: *V = R3*. ***i*** = (*1,0,0*), ***j*** = (*0,1,0*) e ***k*** = (*0,0,1*). Então **i*, j*** e ***k*** são LI, pois

*a1(1,0,0) + a2(0,1,0) + a3(0,0,1) = (0,0,0)*

*(a1,a2,a3) = (0,0,0)*

*a1 = 0, a2 = 0 e a3 = 0*

Exercício: Dado *V = R2*, verificar se *{(1, –1), (1,0), (1,1)}* é *LD* ou *LI*

OBSERVAÇÃO: Se a quantidade de vetores de um conjunto de vetores do *Rn* é maior que *n*, então esse conjunto é *LD*, ou seja, existe algum vetor desse conjunto que é uma combinação linear dos demais. Isso pode ser verificado no exercício anterior.

Teorema: Se *A****x*** *=* ***b*** é um sistema linear não-homogêneo *consistente* e se *W* é o espaço-solução do sistema homogêneo associado *A****x*** *=* ***0***, então o conjunto solução de *A****x*** *=* ***b*** é o subespaço transladado

***xo*** *+ W*, onde ***xo*** é uma solução qualquer do sistema não-homogêneo.

Exemplo 24: Seja o sistema não-homogêneo

*x1 + x2 – 2x3 + 4x4 = 5*

*2x1 + 2x2 – 3x3 + x4 = 3*

*3x1 + 3x2 – 4x3 – 2x4 = 1*

cujo espaço solução é

*x1 = –9 – t1 + 10t2*

*x2 = t1*

*x3 = –7 + 7t2*

*x4 = t2*

que pode ser representado em forma de vetores coluna como



Então, o espaço solução do sistema homogêneo associado é



Logo, o espaço solução do sistema não-homogêneo é uma translação do espaço solução do sistema homogêneo pelo vetor solução particular ***xo*** do sistema não-*homogêneo*, ou seja,

***x*** *=* ***xh*** *+* ***xo***

onde



Teorema: Se a forma escalonada reduzida por linha de uma matriz *An×n* é a matriz identidade *In*, então os *vetores linha de A*, bem como os *vetores coluna de A*, são linearmente independentes.

Exercício: verificar se os seguintes vetores do *R4* são linearmente independentes, usando o teorema anterior.

***v1*** *= (2, 2, –1, 1);* ***v2*** *= (4, 3, –1, 2);* ***v3*** *= (8, 5, –3, 4);*

***v4*** *= (3, 3, –2, 2)*

**Resposta***: são LI*

**SUBESPAÇOS GERADOS**

Seja *V* um espaço vetorial e *A = {****v1, v2, ..., vk****} ≠ Ø* um subconjunto de *V*. Então, um conjunto *S* de todos os vetores de *V* que são *combinações lineares* dos vetores de *A* é dito um *subespaço gerado* por *A* ou pelos vetores de *A* e escreve-se: *S = ger(A)*.

Exemplo 25: Os vetores ***e1*** *= (1, 0, 0)* e ***e2*** *= (0, 1, 0)* geram o subespaço *S = {(x, y, 0)* *∈ R3 | x, y ∈ R}* pois

*(x, y, 0) = a1****e1*** *+ a2****e2***

*= a1(1, 0, 0) + a2(0, 1, 0)*

*= (a1, 0, 0) + (0, a2, 0) = (a1, a2, 0)*

Assim, basta que *a1 = x* e *a2 = y*.

Exemplo 26: Verificar se o conjunto *A = {****v1****,* ***v2****},* com***v1*** *= (1, 2) e* ***v2*** *= (3, 5)* gera o *R2*.

Solução: Todos os vetores *(x, y)∈ R2*, devem ser uma combinação linear de ***v1*** e ***v2***, Assim:

*(x, y) = a1****v1*** *+ a2****v2***

*= a1(1, 2) + a2(3, 5)*

*= (a1, 2a1) + (3a2, 5a2) = (a1 + 3a2, 2a1 + 5a2)*

Então, temos o sistema

*a1 + 3a2 = x*

*2a1 + 5a2 = y*

Como pode ser verificado, esse sistema é consistente para qualquer *x* e *y*, portanto ***v1*** e ***v2*** geram o *R2*.

Exemplo 27: Verificar se os vetores ***e1*** *= (1, 0),* ***e2*** *= (0, 1)* e

***v3*** *= (–3, 2)* geram o *R2*.

Solução: Procedendo como no exemplo anterior, obtemos o sistema:

*a1 – 3a3 = x*

*a2 + 2a3 = y*

Esse sistema é verificado ser consistente para qualquer *x* e *y*. Logo, esses três vetores também geram o *R2*.

OBSERVAÇÃO: É interessante notar nos exemplos 34 e 35, que o *R2* pode ser gerado por dois, três ou mais vetores, mas nunca por apenas um. O *R3* pode ser gerado apenas por três, quatro ou mais vetores, e assim por diante, ou seja, o número de vetores geradores deve ser no mínimo igual à dimensão do espaço. No caso dessa condição ser satisfeita, a única possibilidade do conjunto de vetores não poderem gerar um dado espaço é se todos eles forem múltiplos um do outro.

**BASE E DIMENSÃO**

*Base*: Um conjunto *B = {****v1, v2, ..., vk****}* é uma base de um espaço vetorial *V* se as seguintes condições forem ambas satisfeitas

1. *B é LI*
2. *B gera V*

Por exemplo, *B = {(1, 0), (0, 1)}* é a base canônica do *R2* e *B = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)* é a base canônica do *R3*.

Qualquer espaço vetorial pode ter mais de uma base.

*Dimensão*: Se *V* é um espaço vetorial que tem uma base com *n* vetores, então *V* tem dimensão *n* e escreve-se: *dimV = n*.

Por exemplo, *dimR2 = 2* e *dimR3 = 3*

**PROPRIEDADES DAS BASES E DIMENSÕES**

1. Qualquer conjunto *LI* de um espaço vetorial *V* é base do subespaço por ele gerado. Confira isso no exemplo 33.
2. Se *B = {****v1, v2, ..., vn****}* for base de um espaço vetorial *V*, então todo conjunto com mais de *n* vetores de *V* é *LD*. Confira isso no exemplo 35.
3. Duas bases quaisquer de um espaço vetorial *V* têm o mesmo número de vetores.
4. Se *dimV = n* e *S* é um subespaço de *V*, então *dimS ≤ n*.
5. A dimensão de um subespaço vetorial pode ser determinada pelo número de variáveis livres de seu vetor genérico. Por exemplo, seja o subespaço

*S = {(x, y, z) ∈ R3 | x + y + 2z = 0}*

Isolando *x* temos *x =* *–y – 2z*, onde *y = t1* e *z = t2* são as variáveis livres. Então, para qualquer vetor *(x, y, z) ∈ S*, temos

*(x, y, z) = (–y – 2z, y, z) = (–t1 – 2t2, t1, t2) = t1(–1, 1, 0) +t2 (–2, 0, 1)*.

Isto é, todo vetor de *S* é uma combinação linear dos vetores *(–1, 1, 0)* e *(–2, 0, 1).*

Portanto

*dimS = 2 = no de variáveis livres*.

Exemplo 28: O plano *x + y + 2z = 0* é um subespaço do *R3*. Encontre três bases diferentes para esse subespaço.

Solução: Tomando três vetores diferentes desse plano, por exemplo, *(1, –1, 0), (2, 0,* *–1)* e *(0, 2, –1)*, então quaisquer dois desses vetores formam uma base do plano.

Exercício: O espaço solução do sistema homogêneo abaixo é um subespaço do *R4*. Encontre uma base canônica desse subespaço e dê a sua dimensão.

*3x1 + x2 + x3 + x4 = 0*

*5x1 – x2 + x3 – x4 = 0*

**Resposta**: ***v1*** *= (–1/4, –1/4, 1, 0)* e***v2*** *= (0, –1, 0, 1); dimS = 2*

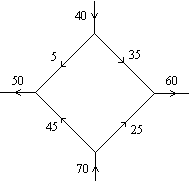
4.10 APLICAÇÕES

**ANÁLISE DE REDES**

Em termos gerais, uma rede é um conjunto de *ramos* através dos quais “flui” alguma coisa. Na maioria das redes, os ramos se encontram em pontos denominados de *nós* ou *vértices*. Existem basicamente dois tipos de redes: *aberta* - na qual o fluxo pode entrar ou sair da rede, e *fechada* - na qual o fluxo circula continuamente pela rede sem entrar ou sair. Os principais tipos de redes têm três propriedades básicas:

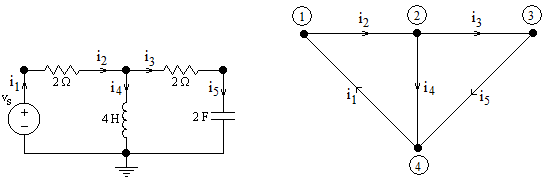
1. *Fluxo unidirecional*: o fluxo em qualquer ramo é sempre num único sentido.
2. *Conservação do fluxo num nó*: a taxa de fluxo para dentro de um nó é igual à taxa de fluxo para fora deste mesmo nó.
3. *Conservação do fluxo na rede*: a taxa de fluxo para dentro da rede é igual à taxa de fluxo para fora desta mesma rede.

A figura 4-3 ilustra uma *rede aberta* onde os números representam a quantidade ou taxa de alguma coisa que está fluindo nos ramos desta rede. Observe, nesta rede, a presença destas três propriedades.



**Fig. 4-3: Exemplo de uma rede aberta.**

Exemplo 29: A figura 4-4(a) mostra um circuito elétrico e a figura 3-4(b) a sua topologia em forma de um *grafo*, onde cada ramo do grafo representa um elemento do circuito com o respectivo sentido da corrente, indicado pela seta, e cada vértice é um nó (conexão de dois ou mais elementos).



1. (b)

**Fig. 4-4: Circuito elétrico e sua topologia**

Solução: Seja aplicar a lei de Kirchhoff para as correntes em cada um dos quatro nós, convencionando-se que as correntes que saem são positivas e as que chegam são negativas:

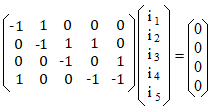
*Nó 1: –i1 + i2 = 0*

*Nó 2: –i2 + i3 + i4 = 0*

*Nó 3: –i3 + i5 = 0*

*Nó 4: i1 –i4 – i5 = 0*

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como segue:



Ou simplesmente *A****i*** *=* ***o***

O vetor ***i*** é o vetor coluna das correntes de ramo. A matriz *A* recebe o nome de *matriz de incidência*, pois descreve os sentidos de incidência dos ramos nos nós (*1* quando está saindo, *–1* quando está chegando e *0* quando está ausente).

**INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL**

Um problema importante em várias aplicações é o de se encontrar um polinômio cujo gráfico passa por um conjunto de pontos conhecidos no plano. Este polinômio é chamado de *polinômio interpolador*, genericamente escrito como:

*p*(*x*) = *a*o *+ a*1*x + a*2*x2 + ... + a*n-1*x*n-1 (4-9)

Teorema: Dados quaisquer *n* pontos distintos no plano *xy*, existe *um único* polinômio de grau *n – 1* cujo gráfico passa por estes pontos.

Para se encontrar o polinômio interpolador, cujo gráfico passa pelos pontos (*x*1*, y*1), (*x*2*, y*2), ..., (*x*n*, y*n) e cuja equação geral é *y = a*o *+ a*1*x + a*2*x2 + ... + a*n-1*x*n-1, substituí-se os pontos nesta equação e assim, arma-se o seguinte sistema:

*a*o *+ a*1*x*1 *+ a*2*x*12 *+ ... + a*n-1*x*1n-1 *= y*1

*a*o *+ a*1*x*2 *+ a*2*x*22 *+ ... + a*n-1*x2n-1 = y*2

......................................................

*a*o *+ a*1*x*n *+ a*2*x*n2 *+ ... + a*n-1*x*nn-1 *= y*n.

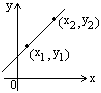
Na forma matricial esse sistema fica:



A matriz *A* deste sistema é conhecida como *matriz de Vandermonde*.

OBSERVAÇÃO: Se supõe que os valores de *x* e *y* são conhecidos de modo que o sistema é linear nas incógnitas *ao, a*1*, a*2 *..., a*n-1.

Exemplo 30: O polinômio do 1º grau *p(x)* = *ao* + *a1x*, é uma reta cujo gráfico passa por dois pontos distintos (*x*1*, y*1) e (*x*2*, y*2) do plano *xy* conforme mostra a Figura 4-6.



**Fig. 4-6**

onde os coeficientes incógnitos *ao* e *a1* podem ser facilmente obtidos resolvendo-se um sistema linear de duas equações.

Exemplo 31: Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos *(1, 3), (2, –2), (3, –5), (4, 0)*

Solução: O polinômio tem a forma:

*p*(*x*) = *a*o *+ a*1*x + a*2*x2 + a*3*x3* ou *y = a*o *+ a*1*x + a*2*x*2 *+ a*3*x*3

Onde, a partir dos pontos fornecidos, tira-se:

*x1 = 1, x2 = 2, x3 = 3, x4 = 4, y1 = 3, y2 = –2, y3 = –5, y4 = 0*

Quando estes valores são substituídos no polinômio cúbico encontra-se um sistema linear nas incógnitas *ao, a1, a2 e a3*, cuja matriz aumentada resulta em:



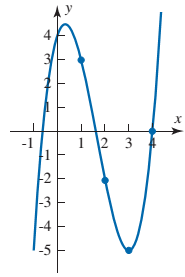
E a matriz na forma escalonada reduzida por linha, obtida após se aplicar o procedimento de Gauss-Jordan, é:



Então, da última coluna desta matriz encontra-se: *ao = 4, a1 = 3, a2 = –5 e a3 = 1*. Assim, o polinômio interpolador é:

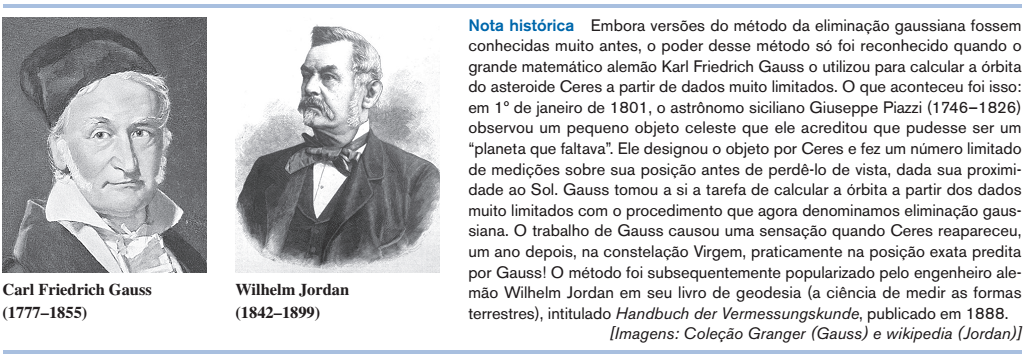
*p(x) = 4 + 3x – 5x2 + x3*

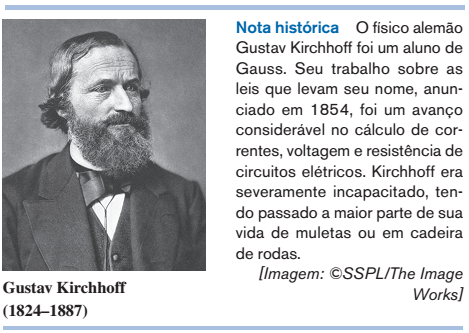
Cujo gráfico é mostrado na figura 4-7.



**Fig. 4-7: Gráfico do polinômio interpolador do exemplo 29**.

CURIOSIDADES HISTÓRICAS

****

****

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



EQUAÇÃO LINEAR DEGENERADA: *0x1 + 0x2 + ... + 0xn = b*

MATRIZ AUMENTADA DE UM SISTEMA LINEAR:



POSTO DE UMA MATRIZ: *pos*(*A*) ou *rank*(*A*): é o número de pivôs da matriz na forma escalonada

SISTEMA NA FORMA MATRICIAL: *AX = B*, onde *X* é a matriz coluna das incógnitas e *B* é a matriz coluna das constantes. Se *B* é uma matriz coluna nula, o sistema será homogêneo. Se *A* é quadrada e tem inversa, então esse sistema tem solução única.

**PROBLEMÁTICA**

1) Resolva os sistemas seguintes aplicando as operações elementares e dê uma interpretação geométrica para cada uma das soluções:

(a) *2x – 5y = 11* (*b) 2x – 3y = 8* (*c) 2x – 3y = 8*

*3x + 4y = 5 –6x + 9y = 6 –4x + 6y = –16*

2) (a) Para que valores de *a* o sistema a seguir possui solução única? (b) Determine os pares (*a, b*) para os quais o sistema possui mais de uma solução.

*x + ay = 4*

*ax + 9y = b*

3) Resolva cada um dos sistemas abaixo expressando a solução, quando possível, como uma combinação linear de vetores.

*2x1 + 3x2 – 6x3 – 5x4 + 2x5 = 7 2x – 6y + 7z = 1 x + 2y – 3z = 2*

*x3 + 3x4 – 7x5 = 6 4y + 3z = 8 2x + 3y + z = 4*

*x4 – 2x5 =1 2z = 4 3x + 4y + 5z = 8.*

(a) (b) (c)

4) Para cada um dos sistemas a seguir resolva-os utilizando o processo de eliminação de Gauss ou Gauss-Jordan na matriz aumentada do sistema.

*x + 2y – 4z = –4 x + 2y – 3z = –1 x + 2y – 3z = 1*

*(a) 2x + 5y – 9z = –10 (b) –3x + y – 2z = –7 (c) 2x + 5y – 8z = 4*

*3x – 2y + 3z = 11 5x + 3y – 4z = 2 3x + 8y – 13z = 7.*

5) Determine a matriz aumentada e a matriz dos coeficientes do seguinte sistema:

*x + 2y – 3z = 4*

*3y – 4z + 7x = 5*

*6z + 8x – 9y = 1*

6) Encontre os valores de *k∈R*, tais que o sistema homogêneo a seguir tenha uma solução distinta da solução trivial.

*2x – 5y + 2z = 0*

*x + y + z = 0*

*2x + kz = 0.*

7) Represente o sistema a seguir na forma matricial e encontre a matriz incógnita que é solução do sistema. O que representa, geometricamente, a solução encontrada?

*x + 6y – 8z = 1*

*2x + 6y – 4z = 0*

8) Monte um sistema linear a três incógnitas, *x, y* e *z*, cuja solução é

***x*** *= (2t + 3, t – 1, t)*

onde *t* é um parâmetro.

9) Nas equações dos planos, dadas a seguir encontre equações vetoriais e paramétricas para a reta de interseção dos planos dados, em *R3*.

*a) x + y – z = 3* e *2x + y + 3z = 4.*

*b) x + 2y + 3z = 1* e *3x – 2y + z = 2.*

10) As matrizes escalonadas por linha dadas a seguir são resultantes das matrizes aumentadas de determinado sistema linear. Para cada uma delas indique se o sistema tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução.



11) Foram estudados tres tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (digamos *1 g*) determinou-se que:

i) O alimento I contém *1* unidade de vitamina A, *3* de vitamina B e *4* de vitamina C.

ii) O alimento II contém *2* de A, *3* de B e *5* de C.

iii) O alimento III contém *3* de A, *3* de C e nenhuma unidade de B.

Se são necessárias *11* unidades de vitamina A, *9* de vitamina B e *20* de vitamina C, encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornecem as quantidades de vitaminas desejadas. Se o alimento I custa *60 centavos* por grama e os outros dois custam *10 centavos*, existe uma solução custando exatamente *R$1,00*.

12) Encontre os coeficientes *a, b, c* e *d* tais que a curva mostrada na figura P4-1 seja dada pela equação

*ax2 + ay2 + bx + cy + d = 0*. Esta equação corresponde a equação de uma circunferência.

Diagrama, Diagrama de Venn

Descrição gerada automaticamente

**Fig. P4-1**

13) A rede da figura P4-2 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída da *rua 2* e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam a praça. Todas as ruas são de mão única. (a) Quantos veículos por hora deveria o semáforo deixar passar para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio que sai do complexo? (b) Encontre *x1, x2, x3* e *x4* (número médio de veículos que circundam a praça); (c) Sendo *x1, x2, x3* e *x4* números inteiros não negativos, discuta os limites impostos para esses valores.

Gráfico, Diagrama, Esquemático

Descrição gerada automaticamente

**Fig. P4-2**

14) A metade da idade de Joaquina somada com a terça parte da idade de José é igual à 14. Sabe-se que José é tres anos mais novo que Joaquina. Encontre as idades de cada um, resolvendo o sistema obtido através de *matriz inversa*.

**Resposta:** *Joaquina 18 e José 15.*

(**\***) 15) Encontre uma base e dê a dimensão do espaço solução do sistema abaixo

*2x1 + 2x2 – x3 + x5 = 0*

*–x1 – x2 + 2x3 – 3x4 + x5 = 0*

*x1 + x2 – 2x3 – x5 = 0*

**(**\***)** 16) Mostre que os vetores ***v1*** *=* *(1, 1, 1),* ***v2*** *= (1, 1, 0),* ***v3*** *= (1, 0, 0)* e ***v4*** = *(3, 2, 0)* geram o *R3* mas não constituem uma base de *R3*.

(**\***) 17) Seja o espaço vetorial *V = R2* e o subconjunto *W = {(x,y) ∈ R2 | y = 2x}*. Verificar se *W* é um subespaço de *V*.

(**\***) 18) Seja o espaço vetorial *V = R2* e o subconjunto *W = {(x,y) ∈ R2 | y = 4 – 2x}*. Verificar se *W* é um subespaço de *V*.

(**\***) 19) Seja o espaço vetorial *V = R2* e o subconjunto *W = {(x,y) ∈ R2 | y = |x|}*. Verificar se *W* é um subespaço de *V*.

(**\***) 20) Verificar se os vetores ***v1*** *= (6, 2, 3)* e ***v2*** *= (0, 5, 3)* são *LI* ou *LD*.

(**\***) 21) Para cada um dos itens a seguir use as propriedades de fechamento de subespaço para determinar se o conjunto dado é um subespaço do *R3*. Se não é um subespaço, indique qual propriedade falha.

1. Todos os vetores da forma *(a, 0, 0), aϵR*.
2. Todos os vetores com componentes inteiros.
3. Todos os vetores *(a, b, c)* para os quais *b = a + c*.
4. Todos os vetores *(a, b, c)* para os quais *a + b + c = 1*.

22) Use a decomposição *LU* dada, para resolver o sistema *A****x*** *=* ***b*** por substituição para frente seguida de retrosubstituição.



23) Encontre uma decomposição *LU* da matriz de coeficientes *A* para resolver o sistema *A****x*** *=* ***b***.



24) A figura P3-1 mostra o diagrama simplificado de um robô industrial. Ele consiste em um braço e um antebraço que podem ser flexionados, independentemente, por ângulos *α* e *β* e cujos comprimentos podem variar independentemente por *L1* e *L2*. Para *α* e *β* fixados, quais deveriam ser os comprimentos do braço e antebraço para poder colocar a ponta do robô na posição *(x,y)* conhecida.

[Sugestão: Proceda como no exemplo 14]

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

**Fig. P3-1 Braço simplificado de um robô**

25) Seja a matriz 

Descreva todos os vetores coluna, ***u***, tal que *A****u*** *= 3****u***.

26) Utilizando interpolação polinomial, encontre o único polinômio do segundo grau que passa pelos pontos *A(3, 2), B(6, 2)* e *C(2, 6)*.

**Resposta***: y = x2 – 9x + 20*.