**CAPÍTULO 2**

**INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA**

A geometria analítica trata do estudo de figuras geométricas através de equações vetoriais ou algébricas. Aqui, especificamente, será feito o estudo da reta, do plano e das cônicas.

1.1 A RETA

Algumas equações da reta serão analisadas nesta seção, utilizando vetores.

**EQUAÇÕES VETORIAIS E PARAMÉTRICAS DA RETA**

Seja ***p*** um ponto qualquer de uma reta que passa por um ponto conhecido ***po*** e é paralela a um vetor ***v***, denominado de *vetor diretor* da reta. Então, o vetor (***p*** *–* ***po***) também é paralelo a ***v***, conforme mostra a figura 2-1. Logo, para um escalar *t* qualquer, pode-se escrever:

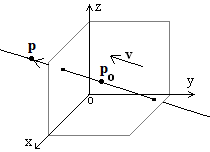
***p*** *–* ***po*** = *t****v***

ou

***p*** = ***po*** + *t****v*** *(–∞ < t < +∞)* (2-1)

À medida que o *parâmetro* *t* varia, o ponto ***p*** percorre a reta. A equação (2-1) é conhecida como *equação vetorial da reta*. Em particular, se ***po*** = ***o***, a reta passa na origem e chamamo-la de *reta na origem*. Neste caso, sua equação fica:

***p*** = *t****v*** *(–∞ < t < +∞)*



**Fig. 2-1: Reta no R3**

Na equação (2-1), fazendo-se ***p*** = (*x*, *y*, *z*), ***po*** = (*xo*, *yo*, *zo*) e ***v*** = (*a*, *b*, *c*), pode-se escrever:

(*x*, *y*, *z*) = (*xo*, *yo*, *zo*) + *t*(*a*, *b*, *c*)

donde se obtém as equações a seguir, conhecidas como *equações paramétricas:*

*x* = *xo* + *at*

*y* = *yo* + *bt* (2-2)

*z* = *zo* + *ct*

Exemplo 1: Encontre uma equação vetorial e as equações paramétricas da reta no *R3* que passa pelo ponto (*1, 2, –3*) e que é paralela ao vetor ***v*** *=* (*4, –5, 1*).

Solução: substituindo os dados na equação (2-1) se tem a equação vetorial:

(*x, y, z*) *=* (*1, 2, –3*) *+ t*(*4, –5, 1*)

Desta equação vetorial tiram-se as equações paramétricas:

*x = 1 + 4t*

*y = 2 – 5t*

*y = 2 – 5t*

Observe-se que, para cada *t* variando de *–*∞ a +∞, tem-se um ponto específico da reta. Por exemplo, se *t* *= 1* tem-se o ponto (*5, –3, –2*), se *t = –1* tem-se o ponto (*–3, 7, –4*) e assim por diante.

Exercícios:

1) Encontre as equações paramétricas da reta na origem cujo vetor diretor é ***v*** *= –****ax*** *+ 3****ay*** *– 4****az***.

**Resposta:** *x = –t, y = 3t, z = –4t*

2) Encontre um vetor paralelo à reta cujas equações paramétricas são:

*x = 1 – 2t, y = –3 – t, z = –4 + t*

**Resposta: *v*** *=* (*–2, –1, 1*)

Exemplo 2: Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos *P*(*0, 7*) e *Q*(*5, 0*).

Solução: Com estes dois pontos, pode-se ter um vetor diretor da reta como, por exemplo:

***v*** *=* ***PQ*** *= (5, 0) – (0, 7) = (5, –7)*

e utilizando-se um dos pontos desta reta, por exemplo, o ponto *P*, obtém-se a equação vetorial:

(*x, y*) *=* (*0, 7*) *+ t*(*5, –7*)

E as paramétricas:

*x = 5t, y = 7 – 7t*

OBSERVAÇÃO: Escolhendo-se o ponto *Q(5, 0)* em vez do ponto *P*, tem-se *x = 5 + 5t* e *y = –7t* que também são equações paramétricas da mesma reta, embora sejam diferentes. Para comprovar isso, basta se tirar o parâmetro *t* de uma equação e substituí-lo na outra. Nos dois casos obtém-se a mesma *equação geral da reta*, que resultará em *7x + 5y = 35.*

Exercícios:

1) O ponto *P(2, y, z*) pertence à reta determinada pelos pontos *A*(*3, –1, 4*)e *B*(*4, –3, 1*). Encontre o ponto *P.*

**Resposta:** *P*(*2, 1, 7*)

2) Tente visualizar no *R3* a reta cujas equações paramétricas são: *x = 2, y = t, z = 3 – 3t*

**EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA**

Das equações paramétricas (2-2), pode-se dar outra forma, isolando as variáveis *y* e *z* em função de *x*. Assim, da equação de *x* tira-se *t =* (*x – xo*)*/a* que substituído nas equações de *y* e *z*, se obtém:

*y = mx + n*

*z = px + q* (2-4)

Estas são as *equações reduzidas* da reta, onde: *m = b/a*, *n = (–b/a)xo + yo*, *p = c/a*, *q = (–c/a)xo + zo*

Observe-se que, se os componentes do vetor diretor (*a, b, c*) for dividido por *a*, obtém-se outro vetor diretor dado por ***v*** = (*1, b/a, c/a*). Mas, *b/a = m* e *c/a = p*, então, o vetor diretor da reta, na forma reduzida, também pode ser dado por:

***v*** *=* (*1, m, p*)

OBSERVAÇÃO: Na equação (2-4) a variável *x* figura como *variável independente*. Se as equações forem expressas de forma que a variável independente seja *y* ou *z*, ainda assim as equações são chamadas equações reduzidas.

Exemplo 3: Encontrar as equações reduzidas da reta *r* que passa pelos pontos *A*(*2, 1, –3*)e *B*(*4, 0, –2*) explicitando-as em termos de *x*.

Solução: Primeiro se encontra as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto *A* e tem direção do vetor ***v*** *=* ***AB*** *= (2, –1, 1)*. Então, tem-se:

*x = 2 + 2t y = 1 – t z = –3 + t*

Da equação de *x* tira-se *t = (x – 2)/2*, que, substituído nas equações de *y* e *z* fornece as equações reduzidas:

*y = (–1/2)x + 2 z = (1/2)x – 4*

Exercício: Encontre um vetor diretor da reta cujas equações reduzidas são: *y = –3x* e *z = 2x – 2*

**Resposta***:* (*1, –3, 2*)

**POSIÇÃO DA RETA EM RELAÇÃO AOS PLANOS E AOS EIXOS COORDENADOS**

Sendo ***v*** *=* (*a, b, c*) o vetor diretor da reta, pode-se visualizar as seguintes situações:

(1) *Reta perpendicular a somente um dos eixos*: Sabe-se que, se um vetor é ortogonal a um eixo, seu componente na direção deste eixo é nulo. Por exemplo, se apenas *a = 0*, então ***v*** *=* (*0*, *b*, *c*) é o vetor da reta que tem a direção de ***v*** e é ortogonal ao eixo *x* e, consequentemente, paralela ao plano *yz*. Suas equações ficam expressas como:

*x = xo*, *y = yo + bt* *z = zo + ct*

É fácil de comprovar que esta reta é ortogonal ao eixo *x*. Basta verificar que:

***v******.******ax*** *= 0* ou seja (*0, b, c*)***.***(*1, 0, 0*) *= 0*

Exemplo 4: Estabelecer as equações da reta que passa pelos pontos *A*(*1, 0, 9*)e *B*(*4, 8, 9*) e analisar sua posição em relação aos eixos e planos coordenados.

Solução: Um vetor diretor da reta será: ***v*** *=* ***AB*** *= B – A =* (*3, 8, 0*). Como o componente *c* é nulo, a reta é ortogonal ao eixo *z* e paralela ao plano *xy*. Logo, suas equações paramétricas serão:

*x = 1 + 3t, y = 8t, z = 9*

Exercício: Escreva as equações paramétricas da reta perpendicular

(a) Ao eixo *y* (b) Ao eixo *z*

(2) *Reta perpendicular a dois eixos*: neste caso, o vetor diretor ***v*** tem dois componentes nulos. Por exemplo, se *a = b = 0*, então o vetor ***v*** *=* (*0, 0, c*) é ortogonal aos eixos *x* e *y* e, consequentemente, paralelo ao eixo *z* e, portanto, a reta *r* é paralela ao eixo *z*. Neste caso, as equações de *r* são:

*x = xo*, *y = yo*, *z = zo + ct*

Ou, simplesmente

*x = xo*, *y = yo*

Exemplo 5: Determinar as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto *A*(*0, 3, –2*) e é paralela ao eixo *x*.

Solução: Como a reta é paralela ao eixo *x* então seu vetor diretor é: ***v*** *=* (*a, 0, 0*). Logo, suas equações são:

*x = at, y = 3, z = –2*

ou simplesmente

*y = 3* e *z = –2*

Exercício: Encontre um vetor diretor para a reta de equações:

*x = 7, z = –3*

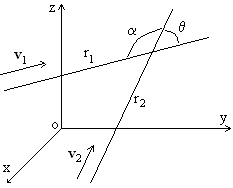
**Resposta: *v*** *=* (*0, b, 0*)

**ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS**

Sejam as retas *r1* e *r2* com vetores diretores ***v1***e***v2***, respectivamente, conforme Figura 2-2. Defini-se o *ângulo entre as duas retas* *r1* e *r2* como o *menor ângulo* entre os vetores diretores destas retas. Sendo *θ* este ângulo, tem-se:

 (2-5)

Neste caso, a presença do módulo no produto escalar dos vetores se faz necessária porque o menor ângulo entre duas retas não passa de 90º.



**Fig. 2-2: Ângulo entre duas retas**

Exemplo 6: Calcular o ângulo entre as retas *r1* e *r2* descritas pelas equações:

*r1: x = 3 + t, y = t, z = –1 – 2t*

*r2:* y = *–x/2 + 2, z = –x/2 – 1*

Solução: Os vetores diretores de *r1* e *r2* são respectivamente: ***v****1 =* (*1, 1, –2*)e***v****2 =* (*1, –1/2, –1/2*). Então:

*|****v1****·****v2****| = |*(*1, 1, –2*)***.***(*1,* )*| = || =*

e

Portanto, usando a equação (2-5), encontra-se:

ou

Exercício: Encontre o cosseno do ângulo entre as retas *r1* e *r2* descritas pelas equações abaixo:

*r1: x = 2; z = 3*

*r2: y = –x/2 + 2; z = x/2 – 4*

**Resposta:** *0,408*

**CONDIÇÃO DE PARALELISMO DE DUAS RETAS**

A condição de paralelismo de duas retas *r1* e *r2* é a mesma condição de paralelismo dos vetores

***v1*** *= (a1, b1, c1) e* ***v2*** *= (a2, b2, c2)*, que definem as direções destas retas, isto é:

***v1*** *= m****v2*** ou

Exemplo 7: A reta *r1* passa pelos pontos *A1*(*–3, 4, 2*) e *B1*(*5, –2, 4*) enquanto a reta *r2* passa pelos pontos *A2*(*–1, 2, –3*) e *B2*(*–5, 5, –4*). Verificar se elas são paralelas.

Solução: ***v1*** *=* ***A1B1*** *= (8, –6, 2)* e ***v2*** *=* ***A2B2*** *=* *(–4, 3, –1)*. Então:

. Logo, as retas são paralelas.

Exercício: Se as retas *r1* e *r2* forem expressas, respectivamente, pelas equações reduzidas:

*r1*: *y = m1x + n1*, *z = p1x + q1*

*r2*: *y = m2x + n2*, *z = p2x + q2*

Mostre que elas serão paralelas quando: *m1 = m2* e *p1 = p2*

**CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE DE DUAS RETAS**

A condição de ortogonalidade das retas *r1* e *r2* é a mesma condição de ortogonalidade dos vetores diretores ***v1*** *= (a1, b1, c1)* e ***v2*** *= (a2, b2, c2)* destas retas, isto é:

***v1******.v2*** *= 0* ou *a1a2* + *b1b2* + *c1c2 =* *0*

Exemplo 8: Calcule o valor do escalar *m* para que as retas a seguir sejam ortogonais.

*r1: y = mx – 3, z = –2x*

*r2: x = –1 + 2t, y = 3 – t, z = 5t*

Solução: Os vetores diretores são respectivamente:

***v1*** = (*1, m, –2*) e ***v2*** =(*2, –1, 5*)

A condição de ortogonalidade permite escrever:

***v1******.v2*** *= 0*

(*1, m, –2*)***.***(*2, –1, 5*) *= 0*

*2 – m – 10 = 0*

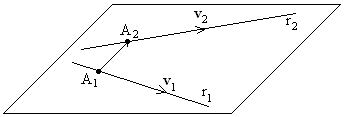
Logo, *m = –8*

OBSERVAÇÃO: Uma reta *r* que é ortogonal a um plano *π*, é também ortogonal a qualquer reta contida nesse plano. Assim, existem infinitas retas que passam por um ponto *A∈ π* e que são ortogonais à reta *r*.

**CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE DUAS RETAS**

Duas retas *r1* e *r2* estarão no mesmo plano (serão coplanares) se os vetores ***v1****,* ***v2*** e ***A1A2***, mostrados na figura 2-3, forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto entre ***v1****,* ***v2*** e ***A1A2***, ou seja,

(***v1****,* ***v2****,* ***A1A2***) *= 0*



**Fig. 2-3: Retas coplanares**

OBSERVAÇÃO: Duas retas paralelas não coincidentes são sempre coplanares.

Exemplo 9: Verificar se as seguintes retas são coplanares.

*r1*: *x = 2 + 2t, y = 3t, z = 5 + 4t*

r2: *x =* *–5 – t, y = –3 + t, z = 6 + 3t*

Solução: Estas equações fornecem as seguintes informações:

*A1*(*2, 0, 5*) *ϵ r1, A2*(*–5, –3, 6*) *ϵ r2,* ***A1A2*** *=* (*–7, –3, 1*)*,* ***v1*** *=* (*2, 3, 4*)e***v2*** *=* (*–1, 1, 3*).

A condição de coplanaridade pode ser verificada, calculando o produto misto destes três vetores. Assim:

= *2*(*1 + 9*) *– 3*(*–1 +21*) *+ 4*(*3 + 7*) *= 20 – 60 + 40 = 0*

Portanto, como o produto misto deu zero, as retas *r1* e *r2* *são coplanares*.

**POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS**

Duas retas *r1* e *r2*, no espaço podem ser *coplanares* ou *não coplanares*.

(1) *Coplanares*: como já visto na figura 2-3 isto acontece se o produto misto (***v1****,* ***v2****,* ***A1A2***) *= 0*. Neste caso elas poderão ser:

- *Paralelas*: quando *r1∩r2 = Ø*. (Sem ponto de interseção).

- *Concorrentes*: quando *r1*∩*r2 =* {*I*}. (*I* é o único ponto de interseção).

(2) *Não coplanares: n*este caso as retas são ditas *reversas*. Isto acontece se o produto misto for diferente de zero. Também neste caso *r1*∩*r2 =* Ø.

Exemplo 10: Encontrar a posição relativa das retas *r1* e *r2* cujas equações são:

*r1*: *x* *= –2t – 5, y = 2t – 3, z = 6t + 6*

*r2*: *x* *= 2t + 2, y = 3t, z = 4t + 5*

Solução: das equações das retas tira-se as informações:

***v1*** *=* (*–2, 2, 6*), ***v2*** *=* (*2, 3, 4*)*, A1*(*–5, –3, 6*) *ϵ r1, A2*(*2, 0, 5*) *ϵ r2,* ***A1A2*** *=* (*7, 3, –1*)

Os vetores ***v1*** e ***v2*** mostram que as retas não são paralelas, e como o produto misto *(****v1****,* ***v2****,* ***A1A2****)* é nulo, então as retas são coplanares e, consequentemente, são concorrentes.

**RETA ORTOGONAL A DUAS RETAS NÃO PARALELAS**

Sejam as retas *r1* e *r2*, não paralelas, com as direções de ***v1*** *=* *(a1, b1, c1)* e ***v2*** *=* *(a2, b2, c2)*, respectivamente. Qualquer reta simultaneamente ortogonal às retas *r1* e *r2* terá um vetor diretor paralelo ou igual ao vetor ***v1***×***v2***.

**RETA NO R2**

Quando apenas duas dimensões são suficientes para se representar uma reta, suas equações ficam mais simples, pois se trabalha apenas com as coordenadas *x* e *y*. Seja se fixar apenas na equação reduzida, que é a mais utilizada, e dar algumas interpretações para ela.

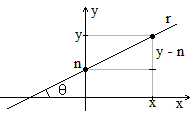
Considerando a figura 2-4 a equação da reta pode ser escrita como:

*y = mx + n*

Neste caso, o escalar *m* é conhecido como *coeficiente angular* ou *inclinação* *da ret*a, e dado por:

*m = tgθ*

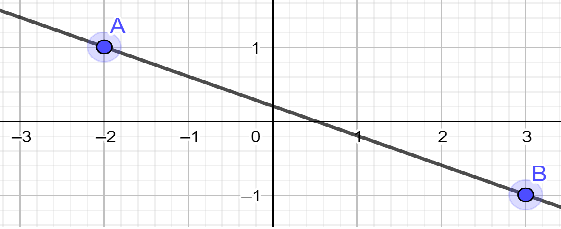
onde *θ* é o ângulo entre a reta e o eixo *x,* contado no sentido anti-horário. A constante *n* representa o valor em que a reta corta o eixo *y*. Observe-se que, se *m* *> 0* (*θ < 90º*), a reta estará inclinada para a direita enquanto, se *m* *< 0* (*θ > 90º*), a reta estará inclinada para a esquerda.



**Fig. 2-4: Reta no R2.**

Observe-se que o vetor diretor da reta é simplesmente ***v*** *= (1,m)*

Exemplo 12: A partir do gráfico da reta mostrada na figura 2-5, encontre a sua equação reduzida.



**Fig. 2-5: Gráfico do exemplo 12.**

Solução: Utilizando-se os pontos *A* e *B* da reta, encontra-se um vetor diretor dela:

***v*** *=* ***AB*** *= B – A =* (*3, –1*) *–* (*–2, 1*) *=* (*5, –2*)

Tomando-se, por exemplo, como ***ro*** o ponto *A(–2, 1)*, escreve-se suas equações paramétricas:

*x = –2 + 5t*

*y = 1 – 2t*

Expressando-se *t* em função de *x* e substituindo-se em *y* encontra-se:

*y =*

Exercício: Mostre que, se duas retas no *R2* são perpendiculares, seus coeficientes angulares, *m1* e *m2* satisfazem a relação: *m1m2 = –1*

Outra forma de se encontrar a equação da reta dada por dois pontos, *P1(x1, y1)* e *P2(x2, y2)*, é encontrar o coeficiente angular, *m,* dado por:

(2-6)

e substituí-lo, juntamente com um dos pontos da reta, na equação:

*y – yi = m*(*x – xi*) (2-7)

Exercício: Encontre a forma reduzida da equação da reta que passa pelos pontos *A*(*1, 2*) e *B*(*–2, 8*) utilizando o procedimento anterior. Faça um esboço desta reta.

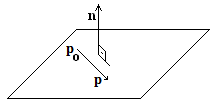
**Resposta:** *y = –2x + 4*

2.2 O PLANO

**EQUAÇÃO VETORIAL E EQUAÇÃO GERAL DO PLANO**

Um plano no R3 pode ser determinado de modo único, se for conhecido um ponto ***po*** desse plano e um vetor ***n*** normal (perpendicular) a ele. Então, para qualquer ponto ***p*** do plano, veja-se figura 2-6, tem-se a equação vetorial:

***n .***(***p*** *–* ***po***) *= 0* (2-8)



**Fig. 2-6: Plano definido por um ponto e um vetor normal**

Fazendo-se ***p*** *=* (*x, y, z*), ***n*** *=* (*a, b, c*) e ***po*** *=* (*xo, yo, zo*), e substituindo-se na equação (2-8) encontra-se:

(*a, b, c*) **.** (*x – xo, y – yo, z – zo*) *= 0*

*a*(*x – xo*) + *b*(*y – yo*) + *c*(*z – zo*) *= 0* (2-9)

Onde *a, b, c* são constantes não todas nulas.

Eliminando-se os parênteses da equação (2-9) obtém-se uma equação denominada de *equação geral do plano*, como sendo:

*ax* *+* *by + cz = d* (2-10)

onde *d = axo + byo + czo*

Se *d = 0*, o plano *ax + by + cz = 0* passa na origem e é denominado de *plano na origem*.

Exemplo 13: Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto (*3, –1, 7*) e é perpendicular ao vetor (*4, 2, –5*)

Solução: fazendo ***po*** *=* (*3, –1, 7*) e ***p*** *=* (*x, y, z*), tem-se:

(***p*** *–* ***po***) *=* (*x – 3, y + 1, z – 7*), e como ***n*** *=* (*4, 2, –5*), então, usando a equação (2-9) encontra-se:

*4*(*x – 3*) *+ 2*(*y + 1*) *– 5*(*z – 7*) *= 0*, logo, a equação geral será:

*4x + 2y – 5z = –25*

Outra solução: a equação geral do plano é *ax + by + cz = d*. Como se conhece os valores de *a, b* e *c*, tirados do vetor ***n***, então se escreve:

*4x + 2y – 5z = d*

Para encontrar o valor de *d*, substitui-se *x, y* e *z* pelo ponto dado. Assim:

*4*(*3*) *+ 2*(*–1*) *– 5*(*7*) *= d*, ou seja, *d = –25*

Portanto, a equação do plano é:

*4x + 2y – 5z = –25*

Exercício: Encontre a equação geral do plano mediador do segmento *AB*, cujas extremidades são os pontos: *A*(*2, –1, 4*) e *B*(*4, –3, –2*)

**Resposta***: x – y – 3z – 2 = 0*

**EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO**

Um plano pode ser determinado também de modo único, conhecendo-se um ponto ***po*** pertencente a ele e dois vetores não nulos e não colineares, conforme mostra a figura 2-7.

Os vetores *t1****v1*** e *t2****v2*** são múltiplos dos vetores ***v1*** e ***v2***, respectivamente, cada um percorrendo uma dimensão do plano, para que todo o plano seja abrangido.

Então, da figura 2-77 tira-se a equação vetorial:

***p*** *–* ***po*** *= t1****v1*** *+ t2****v2*** ou ***p*** *=* ***po*** *+ t1****v1*** *+ t2****v2*** (2-11)

E nesta equação, fazendo-se ***p*** *=* (*x, y, z*), ***po*** *=* (*xo, yo, zo*), ***v1*** *=* (*a1, b1, c1*) e ***v2*** *=* (*a2, b2, c2*), escreve-se:

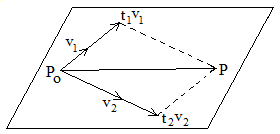
(*x, y, z*) = (*xo, yo, zo*) *+ t1*(*a1, b1, c1*) *+ t2*(*a2, b2, c2*) (2-12)

Donde se tira as *equações paramétricas*, com os parâmetros *t1* e *t2* variando de *–∞* a *+∞*:

*x = xo + a1t1 + a2t2*

*y = yo + b1t1 + b2t2* (2-13)

*z = zo + c1t1 + c2t2*



**Fig. 2-7: Plano determinado por dois vetores não colineares.**

Exemplo 14: Encontre as equações paramétricas do plano passando pelos pontos *P*(*2, –4, 5*)*,*

*Q*(*–1, 4, –3*) *e R*(*1, 10, –7*)

Solução: Com estes três pontos se pode encontrar dois vetores não colineares como na figura 2-8, assim:

***v1*** *=* ***PQ*** *= Q – P =* (*–3, 8, –8*)

***v2*** *=* ***PR*** *= R – P =* (*–1, 14, –12*)

e usando a equação (2-12), escreve-se sua equação vetorial:

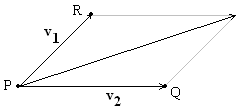
(*x, y, z*) *=* (*2, –4, 5*) *+ t1*(*–3, 8, –8*) *+ t2*(*–1, 14, –12*)

Donde se tira as equações paramétricas:

*x = 2 – 3t1 – t2*

*y = –4 + 8t1 + 14t2*

*z = 5 – 8t1 – 12t2*



**Fig. 2-8: Figura do exemplo 14.**

Exercício: Encontre a equação geral para o plano do exemplo 14.

**Resposta:** *8x – 14y – 17z = –13*

**EQUAÇÃO GERAL DO PLANO UTILIZANDO DETERMINANTE**

Se *Po*(*xo, yo, zo*) é um ponto conhecido do plano e, ***v1*** *=* (*a1, b1, c1*)e ***v2*** *=* (*a2, b2, c2*), são vetores não colineares, e se *P(x, y, z)* é um ponto qualquer deste plano, então os vetores ***PoP***, ***v1*** e ***v2*** são coplanares e, portanto, o produto misto entre eles é nulo, logo pode-se escrever a equação:

Assim, este determinante quando resolvido dá a equação geral do plano.

Exercício: Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto *Po*(*1, –3, 4*) e contém as retas *r* e *s* dadas abaixo.

*r: x = 1 + 3t, y = –3 + t, z = 4 – 2t*

*s:x = 1 + t, y = –3 – t, z = 4 + t*

**Resposta**: *x + 5y + 4z = 2*

Exemplo 15: Encontre equações paramétricas e uma equação vetorial do plano cuja equação geral é

*x – y + 2z = 5*

Solução: Expressando-se *x* em termos de *y* e *z*, transforma-se *y* e *z* em parâmetros. Então, tem-se

*x = 5 + y – 2z* e, fazendo *y = t1* e *z = t2* encontra-se:

*x = 5 + t1 – 2t2, y = t1, z = t2*

Das equações paramétricas pode-se escrever a equação vetorial:

(*x, y, z*) *=* (*5, 0, 0*) *+ t1*(*1, 1, 0*) *+ t2*(*– 2, 0, 1*)

**ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS**

Sejam os planos *π1* e π2 com equações gerais dadas por:

*π1*: *a1x + b1y + c1z = d1* e π2: *a2x + b2y + c2z = d2*

Então, ***n1*** *=* (*a1, b1, c1*) e ***n2*** *=* (*a2, b2, c2*) são vetores normais a *π1* e *π2*, respectivamente.

Define-se o ângulo entre dois planos *π1* e *π2* como o *menor ângulo* entre os vetores normais a estes planos. Sendo *θ* esse ângulo tem-se:

o (2-14)

Exemplo 16: Encontrar o ângulo entre os planos *π1* e *π2* cujas equações são:

*π1: 4x + 2y – 5z = –25*

*π2: 8x – 14y – 17z = 2*

Solução: ***n1*** *=* (*4, 2, –5*)*,* ***n2*** *=* (*8, –14, –17*)

***n1 .n2*** *= 89, ||****n1****|| = 6,70; ||****n2****|| = 23,43*



*θ = 55,51º*

**PLANOS PARALELOS E PLANOS ORTOGONAIS**

As condições de paralelismo e perpendicularismo entre dois planos são as mesmas de seus respectivos vetores normais, isto é:

(1) Se *π1 || π2* então ***n1*** || ***n2***. Logo: *a1/a2 = b1/b2 = c1/c2*

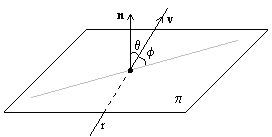
- Se, além disso, *a1/a2 = b1/b2 = c1/c2 = d1/d2*, os planos, além de paralelos, são coincidentes.

(2) Se *π1* ⊥ *π2* então ***n 1*** ⊥ ***n2***. Portanto, a*1a2 + b1b2 + c1c2 =* 0

Exemplo 17: Os planos *π1: 3x – y + 2z = 8* e *π2: 6x – 2y + 4z = 16* são paralelos e coincidentes enquanto que os planos *π1: 3x – y + 2z = 0* e *π2: 6x – 2y + 4z = 1* são só paralelos.

**ÂNGULO DE UMA RETA COM UM PLANO**

Seja *r* uma reta com vetor diretor ***v*** e um plano *π* com vetor normal ***n*** conforme a Figura 2-9.



**Fig. 2-9: Ângulo entre uma reta e um plano.**

O menor ângulo *φ* da reta *r* com o plano *π* é o complemento do ângulo *θ* que a reta forma com uma reta normal ao plano. Tendo em vista que *θ + φ =* *π/2*, então *cosθ = senφ*, portanto, de acordo com a equação (2-5) tem-se:

o (2-15)

Exercício: Determinar o ângulo entre a reta *r* e o plano *π* dados a seguir

*r: x = 1 – 2t, y = –t, z = 3 + t*

*π: x + y – 5 = 0*

**Resposta.** *φ = 60º*

**PARALELISMO E PERPENDICULARISMO ENTRE RETA E PLANO**

Para uma reta *r* com vetor diretor ***v*** e um plano *π* com vetor normal ***n*** tem-se as condições:

(1) Se *r || π* então ***v*** ⊥ ***n***

(2) Se *r* ⊥ *π* então ***v*** *||* ***n***

Exemplo 18: verificar se a reta *r* e o plano *π* dados a seguir são paralelos ou perpendiculares.

*r: x = 2 + 3t,* y = *–1 – 2t, z = –t*

*π: 9x – 6y –3z = –5*

Solução: ***v*** *=* (*3, –2, –1*) *e* ***n*** *=* (*9, –6, –3*). Como *3/9 =* (*–2*)*/*( *–6*) *=* (*–1*)*/*( *–3*), então ***v*** é paralelo a ***n*** o que implica em *r* ser perpendicular a *π*.

**CONDIÇÕES PARA QUE UMA RETA ESTEJA CONTIDA NUM PLANO**

Uma reta *r* está contida num plano *π* se as duas condições a seguir forem satisfeitas simultaneamente:

(1) A reta é paralela ao plano, isto é, o vetor ***v*** da reta é ortogonal ao vetor ***n*** do plano.

(2) Um ponto *A* pertencente a *r* pertence também ao plano *π*.

OBSERVAÇÃO: Uma reta *r* está também contida num plano *π* se dois pontos distintos *A* e *B* pertencentes a *r* pertencem também ao plano.

Exercício: Determinar os valores de *a* e *b* para que a reta *r* esteja contida no plano *π*, dado a seguir.

*r: x = 2 + t, y = 1 + t, z = –3 – 2t*

*π: ax + by + 2z = 1*

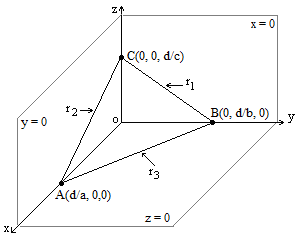
**Resposta:** *a = 3, b = 1*

**INTERSEÇÃO DE UM PLANO COM OS EIXOS E PLANOS COORDENADOS**

Seja um plano *π* dado por sua equação geral *ax + by + cz = d*, ilustrado na figura 2-10. Então se podem ter as seguintes interseções.

(1) *Interseção do plano π com os eixos*: conforme mostra a figura 2-10, são os pontos *A, B* e *C*. Para encontrá-los, basta fazer na equação do plano, duas variáveis iguais a zero para encontrar a terceira e, desta forma, determinar os pontos *A, B* e *C*.

(2) *Interseção do plano π com os planos coordenados*: conforme mostra a figura 2-10, são as retas *r1*, *r2* e *r3*. Como as equações dos planos coordenados são *x =* *0*, *y = 0* e *z = 0*, basta fazer na equação do plano uma variável igual a zero para se encontrar uma equação de reta nas outras duas variáveis.



**Fig. 2-10: Interseções de um plano.**

Exercício:

Encontrar as interseções do plano *3x – 2y + z = 8* com os eixos coordenados.

**Resposta:** *a)* (*8/3, 0, 0*)*;* (*0, –4, 0*)e(*0, 0, 8*)

Exemplo 19: Dado o plano *π: 2x + 3y + z = 6* determine a equação da reta, na forma reduzida, que é a interseção desse plano com o plano *xy*.

Solução: No plano *xy* tem-se *z = 0*, que substituído na equação do plano *π* fica:

*2x + 3y = 6*

Portanto as equações reduzidas da reta são:

*y = 2 – 2x/3, z = 0*

2.3 DISTÂNCIAS

**DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS**

A distância, *d*(*P1, P2*), entre dois pontos *P1*(*x1, y1, z1*) e *P2*(*x2, y2, z2*) é a norma do vetor ***P1P2*** ou ***P2P1***, isto é:

(2-17)

Exemplo 21: Calcular a distância entre os pontos *P1*(*7, 3, 4*) e *P2*(*1, 0, 6*)

Solução: *d*(*P1, P2*) *=* 

**DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA**

Seja uma reta *r* definida por um ponto *P1*(*x1, y1, z1*) e o vetor diretor ***v*** *=* (*a, b, c*), e seja *Po*(*xo,yo,zo*) um ponto qualquer do espaço conforme figura 2-11. Os vetores ***v*** e ***P1Po*** determinam um paralelogramo cuja altura corresponde à distância *d(Po, r)* de *Po* a *r*.

Sabe-se que a área *S*, de um paralelogramo é o produto da base pela altura, *h*

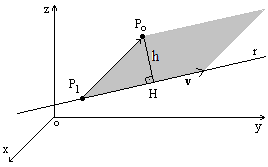
*S =* ||***v***||*h* (I)

ou de acordo com a interpretação geométrica do produto vetorial

*S =* ||***v***×***P1Po***|| (II)

Comparando (I) com (II), tem-se:

(2-18)



**Fig. 2-1. Distância de um ponto a uma reta**

Exemplo 22: Calcular a distância do ponto *Po*(*2, 0, 7*) à reta *r* dada por:

*r: x = 2t, y = 2 + 2t, z =* *–3 + t*

Solução: A reta dada passa pelo ponto *P1*(*0, 2, –3*) e tem o vetor diretor ***v*** *=* (*2, 2, 1*). Seja ainda o vetor ***P1Po*** *= Po – P1* = (2, –2, 10). Então, de acordo com (2-18) tem-se:



Exercício: Calcular a distância do ponto *P*o(*1, 0, 3*) à reta definida pelos pontos *A*(*0, 1, 2*) e *B*(*–1, 3, –2*).

**Resposta:** *0,816*

**DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS**

A distância entre duas retas depende das suas posições relativas.

(1) *Retas concorrentes*: A distância *d*(*r, s*), entre duas retas *r* e *s* concorrentes, é nula por definição.

(2) *Retas paralelas*: A distância entre *r* e *s* é a distância de um ponto qualquer *Po* de uma delas à outra reta, isto é:

*d*(*r,s*) = *d*(*Po,r*), *Po*∈*s*. ou *d*(*r,s*) = *d*(*Po,s*), *Po*∈*r*

Exemplo 23: Calcular a distância entre as retas *r* e *s* cujas equações são dadas por:

*r: y = –2x + 3, z = 2x*

*s: x = –1 – 2t, y = 1 + 4t, z = –3 – 4t*

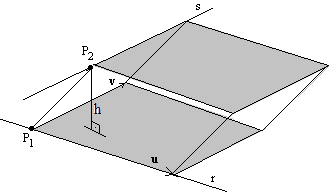
Solução: Primeiro verifica-se que as retas são paralelas, pois os vetores diretores de *r*, ***u*** *=* (*1, –2, 2*) e de *s*, ***v*** *=* (*–2, 4, –4*), são paralelos, ou seja, ***v*** *=* *–2****u***. Então, seja calcular:

*d*(*Po,s*) com *Po*∈*r*.

Um ponto da reta *r* é *Po*(*0, 3, 0*) e a reta *s* passa pelo ponto *P1*(*–1, 1, –3*)*.* Então, de acordo com (2-18), com ***P1Po*** *=* (*1, 2, 3*), tem-se:



(3) *Retas reversas*: Seja a reta *r* definida por *P1*(*x1, y1, z1*) e ***u*** *=* (*a1, b1, c1*) e a reta *s* definida por *P2*(*x2, y2, z2*) e ***v*** *=* (*a2, b2, c2*). Os vetores ***u, v*** e ***P1P2*** *=* (*x2 – x1, y2 – y1, z2 – z1*) determinam um paralelepípedo (figura 2-12) cuja base é definida pelos vetores ***u*** e ***v*** e a altura corresponde à distância *d* entre as retas.



**Fig. 2-12: Retas reversas.**

Sabe-se que o volume *V* de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura, h.

*V =* ||***u****×****v***||*h* (I)

ou de acordo com a interpretação geométrica do módulo do produto misto:

*V =* |(***u****,* ***v****,* ***P1P2***)| (II)

Comparando (I) com (II), vem:

(2-19)

Exemplo 24: Calcular a distância entre as retas *r* e *s* cujas equações são:

*r: x =* *–2 + t, y = 1, z = 4 – 2t*

*s: x = 3, y = 2t – 1, z = –t + 3*

Solução: A reta *r* passa pelo ponto *P1*(*–2, 1, 4*) e tem vetor diretor ***u*** *=* (*1, 0, –2*) e a reta *s* passa pelo ponto *P2*(*3, –1, 3*) e tem vetor diretor ***v*** *=* (*0, 2, –1*). Então ***P1P2*** *=* (*5, –2, –1*). Em seguida calcula-se:

e

Então, de acordo com a equação (2-19), tem-se:

Exercício: Calcular a distância entre as retas *r* e *s* dadas por

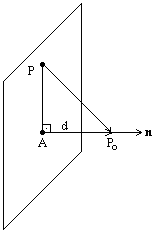
*r: x = 0, y = t, z = t*

*s: y = 3, z = 2x*

**Resposta:** *1,225*

**DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO**

Sejam um ponto *Po*(*xo, yo, zo*) e um plano *π*: *ax + by + cz = d*. Sejam também *A* o pé da perpendicular conduzida por *Po* sobre o plano *π* e *P*(*x, y, z*) um ponto qualquer do plano conforme a figura figura 2-13. Como se pode ver, a menor distância do ponto ao plano é dada pela projeção do vetor ***PPo*** sobre o vetor normal ao plano.



**Fig. 2-13: Distância de um ponto a um plano.**

Portanto, a distância do ponto *Po* ao plano π é: *d*(*Po,π*) = ||***APo***||. Observando-se que o vetor ***APo*** é a projeção do vetor ***PPo*** na direção de ***n***, de acordo com a equação (1-19), escreve-se:

(2-20)

Mas ***PPo*** *=* (*xo – x, yo – y, zo – z*), e que substituídos em (2-20) dá

(2-21)

Exercício: Achar a distância da origem ao plano *π* dado por:

*π: x = 2 – h + 2t, y = 1 + 3h – t, z = –t*

**Resposta:** *1,18*

**DISTÂNCIA ENTRE DOIS PLANOS**

A distância entre dois planos é definida somente quando os planos forem paralelos. A distânciaentre eles é a distância de um ponto qualquer de um dos planos ao outro plano, isto é:

*d*(*π1,π2*) *= d*(*Po,π1*), com *Po∈π2*

Exercício: Calcular a distância entre os planos:

*π1: 2x – 2y + z – 5 = 0* e *π2: 4x – 4y + 2z + 14 = 0*

**Resposta:** *d = 2/3 uc*

**DISTÂNCIA DE UMA RETA A UM PLANO**

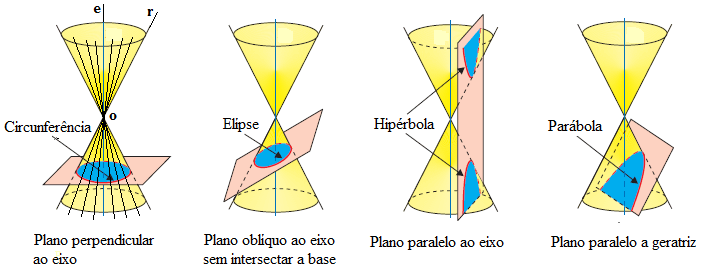
A distância de uma reta a um plano é definida somente quando a reta é paralela ao plano. A distância *d* da reta *r* ao plano *π* é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano, isto é:

*d(r,π) = d(Po,π)*, com *Po∈r*

Exercício: Invente um exercício para calcular a distância de uma reta a um plano e resolva-o. Lembre-se que a reta deve ser paralela ao plano.

2.4 SEÇÕES CÔNICAS

Sejam duas retas, *e* e *r*, não perpendiculares, concorrentes no ponto *O*, conforme mostra a figura 2-14. Fixando a reta *e* e girando a reta *r* de *360º* em torno de *e*, mantendo constante o ângulo entre as retas, será gerada uma *superfície cônica circular* de duas folhas, separadas pelo vértice *O*. A reta *r* é chamada *geratriz* da superfície e a reta *e*, o *eixo* da superfície.



**Fig. 2-14: seções cônicas.**

Chama-se de *seção cônica,* ou simplesmente *cônica,* à curva plana obtida pela interseção de um plano com a superfície cônica. A figura 2-14 ilustra vários casos resultantes desta interseção. De acordo com o posicionamento do plano, pode-se ter:

a) Uma *circunferência* se o plano for perpendicular ao eixo.

b) Uma *elipse* se o plano for oblíquo ao eixo e cortando apenas uma das folhas, mas não a base.

c) Uma *parábola* se o plano for paralelo a uma geratriz e cortando apenas uma folha.

d) Uma *hipérbole* se o plano for paralelo ao eixo, cortando as duas folhas.

Por ora, serão estudadas as cônicas em *posição canônica*, isto é, seus eixos serão sempre paralelos ou coincidentes com os eixos cartesianos. Se o vértice (no caso da parábola) e os centros (no caso da elipse e da hipérbole) coincidirem com a origem, a cônica é dita *cônica central*.

**PARÁBOLA**

Definição geométrica: Considerando-se a figura 2-15(a), parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes do ponto *F* chamado *foco* e da reta *d* chamada *diretriz*. Ou seja, em termos de vetores tem-se:

||**FP**|| = ||**P`P**||

Definição algébrica: Considerando-se a figura 2-15(b), onde a parábola tem *vértice na origem*, tiram-se os vetores:

***FP*** *=* (*x, y – p/2*) e ***P`P*** *=* (*0, y + p/2*)

Que, quando aplicados na definição geométrica, obtém-se:



Donde se tira:

*x2 = 2py* (2-22)

Esta equação é denominada de *equação reduzida da parábola*, que é a sua forma padrão, com o eixo da parábola coincidindo com o eixo *y*.

Como o produto *py* é sempre positivo, então *p* e *y* têm sempre o mesmo sinal. Assim:

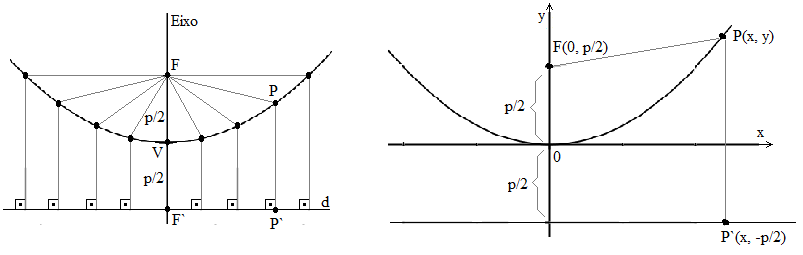
Se *p > 0*, a concavidade da parábola é para cima, pois *y > 0*. Isto implica que a diretriz está abaixo do vértice.

Se *p < 0*, a concavidade da parábola é para baixo, pois *y < 0*. Isto implica que a diretriz está acima do vértice.

Se o eixo da parábola for o eixo *x*, a equação reduzida fica:

*y2 = 2px*.

Neste caso, se *p > 0*, a concavidade é para a direita. Se *p < 0*, a concavidade é para a esquerda.



(a) (b)

**Fig. 2-15: Parábola: (a) Definição geométrica; (b) Definição algébrica**

Exemplo 25: Determinar o foco e a equação da diretriz da parábola *x2 = 8y*.

Solução: Comparando com a equação reduzida *x2 = 2py*, tira-se que:

*2p =* 8, o que dá *p/2 = 2*

Logo, o foco é o ponto *F(0, 2)* e a diretriz é a reta *y = –2*.

Exemplo 26: Determinar a equação e esboçar o gráfico de cada uma das parábolas com vértices na origem, sabendo que: (a) o foco é *F*(*0, 1*)*;* (b) a diretriz *y = 3;* (c) a parábola passa no ponto (*–2, 5*) e tem concavidade para cima.

Solução (a): *p/2 = 1,* ou *p = 2* e, como *x2 = 2py*

Então, a equação é: *x2 = 4y*

Solução (b): Como a diretriz, *y = 3*, está acima do vértice, a concavidade da parábola é para baixo, logo

*p/2 =* *–3 ou p = –6* e, como *x2 = 2py*

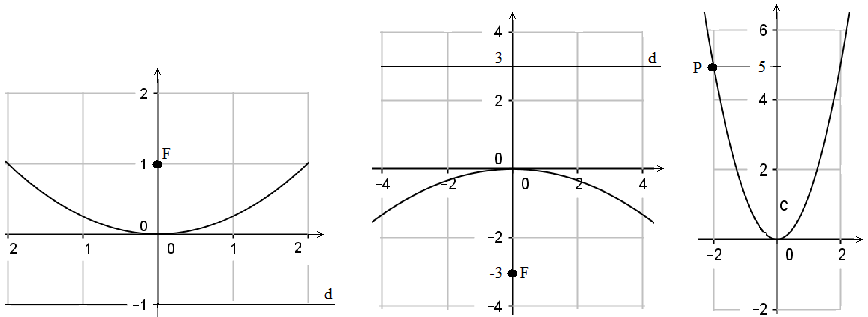
Então, a equação é: *x2 = –12y*

Solução (c): Substituindo-se o ponto na equação da parábola, tira-se

(*–2*)*2 = 2p*(*5*) *ou 2p = 4/5*

Logo, a equação é: *x2 = 4y/5*

Os gráficos são mostrados na figura 2-16.



(a) (b) (c)

**Fig. 2-16: Esboços do exemplo 26**.

**ELIPSE**

*Definição geométrica*: Considerando-se a figura 2-17(a), é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, desse plano, é constante. Ou seja,

*||****F1P****|| + ||****F2P****|| = 2a*

Onde: *F1* e *F2* são os focos; a reta que passa pelos vértices *A1* e *A2* é o eixo maior e a reta que passa pelos vértices *B1 e B2* é o eixo menor.

Na elipse, a equação: *a2 = b2 + c2* é sempre válida. Isto pode ser facilmente comprovada fazendo-se o ponto *P* coincidir com o vértice *B1*.

*Definição algébrica*: Considerando-se a figura 2-17(b), onde o centro da elipse coincide com a origem e o eixo maior coincide com o eixo *x*, tiram-se os vetores:

***F1P*** *=* (*x + c, y*)***F2P*** *=* (*x – c, y*)

Que, quando aplicados na definição geométrica, obtém-se:



Após algumas manipulações algébricas nesta equação e lembrando-se que *a2 – c2 = b2*, obtém-se:

 (2-23)

Que é a *equação reduzida da elipse* com centro na origem e eixo maior, *2a*, coincidindo com o eixo *x*.

Se o eixo maior coincidir com o eixo y, a equação fica:

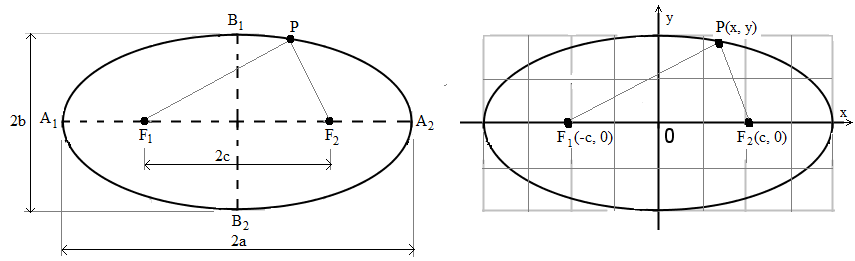


**EXCENTRICIDADE DE UMA ELÍPSE**

A *Excentricidade de uma elipse* dá uma idéia de o quão afastado estão os focos do centro. É calculada pela equação:

*e = c/a*

E, como *a > c*, então *0 ≤ e ≤ 1*



(a) (b)

**Fig. 2-17:Elipse: (a) Definição geométrica; (b) Definição algébrica**.

Exemplo 27: Encontrar o comprimento dos eixos e a posição dos focos da elipse cuja equação é:

*4x2 + 9y2 = 36*.

Solução: Se for dividido os dois membros dessa equação por *36*, encontra-se a equação da elipse na forma reduzida, ou seja,



Quando comparada esta equação com a forma padrão, tira-se:

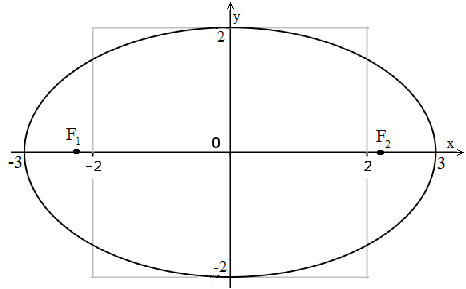
*a2 = 9 🡪 a = 3 🡪 2a = 6 (eixo maior)* e *b2 = 4 🡪 b = 2 🡪 2b = 4 (eixo menor)*

Para se encontrar os focos, calcula-se a distância focal *c*, fazendo-se:

*c2 = a2 – b2 🡪 c2 = 9 – 4 = 5 🡪 c = √5*.

Portanto, as posições dos focos são os pontos: *F1(–√5, 0)* e *F2(√5, 0)*

A figura 2-18 mostra um esboço dessa elipse.



**Fig. 2-18**: **Elipse do exemplo 27, de excentricidade 0,745**.

OBSERVAÇÃO: Se a equação fosse *9x2 + 4y2 = 36*, a elipse seria a mesma, porém com o eixo maior posicionado em *y*.

**EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA**

A circunferência é um *caso particular de uma elipse* com *a = b = r*, onde *r* é o raio da circunferência. Conseqüentemente *c = 0*, ou seja, os focos coincidem com o centro da elipse. Portanto, a circunferência é uma elipse de *excentricidade nula*. Logo, a equação de uma circunferência de raio *r*, centrada na origem é:

*x2 + y2 = r2* (2-24)

Por exemplo, a equação *x2 + y2 – 9 = 0*, representa uma circunferência de raio igual a *3*, centrada na origem.

Exercício:

Uma elipse tem centro na origem e um foco em (*3, 0*), e a medida do eixo maior é *8*. Encontre a equação da elipse.

**Resposta**: *x2/16 + y2/7 = 1*

**HIPÉRBOLE**

*Definição geométrica*: Considerando-se a figura 2-19(a), é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos (focos) deste plano é constante, ou seja,

*| ||****F1P****|| – ||****F2P****|| | = 2a*

Onde *F1* e F2 são os focos, a reta que passa pelos focos e pelos vértices *A1* e *A2* é o *eixo real* e a reta perpendicular ao eixo real, passando no centro da hipérbole é o *eixo imaginário*.

*Definição algébrica*: Considerando-se a figura 2-19(b), onde o centro da hipérbole coincide com a origem e o eixo real coincide com o eixo *x*, tiram-se os vetores:

***F1P*** *= (x + c, y)* ***F2P*** *= (x – c, y)*

Que, quando substituídos na definição geométrica, resulta em:



E após algumas manipulações nesta equação, e lembrando que *c2 = a2 + b2*, obtém-se:

 (2-25)

Que é a *equação reduzida da hipérbole* com centro na origem e eixo real no eixo *x*.

Se o eixo real coincidir com o eixo *y*, a equação reduzida fica:



OBSERVAÇÃO: O valor de *b* no eixo imaginário é definido tal que *c2 = a2 + b2*.

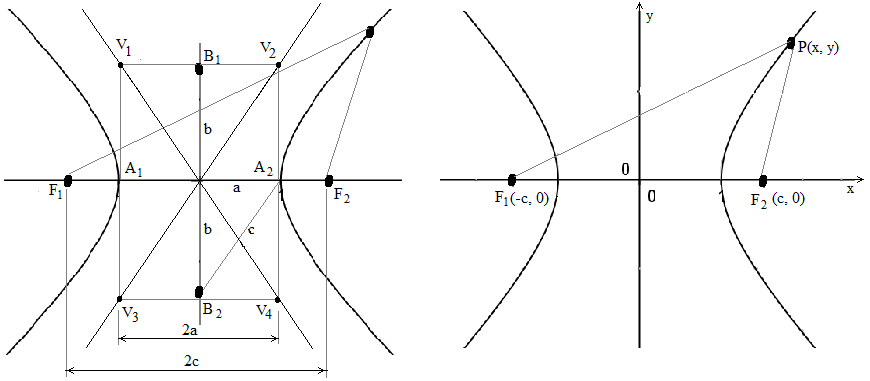
**EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE**

*Excentricidade da hipérbole*: é o número dado por:

*e = c/a*

E como *c > a*, então *e > 1*. A excentricidade da hipérbole está relacionada à sua abertura. Quanto maior a excentricidade, maior a sua abertura.

OBSERVAÇÃO: As diagonais do retângulo *V1V2V3V4* são *assíntotas* aos ramos da hipérbole. Quando *a = b*, o retângulo *V1V2V3V4* se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares. Neste caso, a hipérbole é chamada de *hipérbole eqüilátera*.



(a) (b)

**Fig. 2-19:Hipérbole: (a) Definição geométrica; (b) Definição algébrica**

Exercício: Para a hipérbole de equação *9x2 – 7y2 – 63 = 0*, determine: (a) a medida dos semi-eixos; (b) os vértices; (c) os focos; (d) a excentricidade; (e) as equações das assíntotas; (f) um esboço do gráfico.

**Resposta**: *(a) a = √7; b= 3 (b) A1*(*–√7, 0*) *e A2*(*√7, 0*) *(c) F1*(*–4, 0*) *e F2*(*4, 0*)

*(d)4/√7 (e) y = ±3x/√7*

2.5 TRANSLAÇÃO DE EIXOS

A translação de eixos consiste em deslocar os eixos do sistema original, paralelamente, modificando a origem para outro ponto. A principal finalidade da translação de eixos é modificar a forma das equações.

Tomando-se como base a figura 2-20, o ponto *P* tem coordenadas *(x, y*) no sistema original xOy e o mesmo ponto *P* tem coordenadas *(x`, y`)* no sistema transladado *x`O`y`*. Por esta figura pode-se escrever:

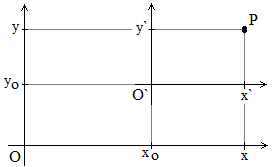
*x = x`+ xo* e *y = y`+ yo*

ou

*x`= x – xo* e *y`= y – yo*

Que são as fórmulas de translação. Elas permitem transformar coordenadas de um sistema para o outro.

Note-se que a origem *O(0, 0)*, no sistema original, mudou para *O`(xo, yo)*.



**Fig. 2-20: Translação de coordenadas**.

**EFEITO DA TRANSLAÇÃO DE EIXOS NAS CÔNICAS**

A partir das equações reduzidas das cônicas podem-se escrever suas equações quando deslocadas da origem. Assim, têm-se as seguintes formas padrões:

Parábola de vértice (*xo, yo*)

(*x – xo*)*2 = 2p*(*y – yo*) (2-26)

Elipse de centro em (*xo, yo*)

(2-27)

Hipérbole de centro em (*xo, yo*)

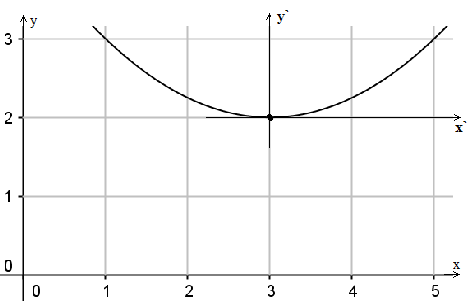
(2-28)

Exemplo 28: Seja a parábola *x2 – 6x – 4y + 17 = 0*. Então, separando-se as variáveis *x* e *y* e completando-se a expressão de *x* para torná-la o quadrado de uma diferença, obtém-se:

(*x – 3*)*2 = 4*(*y – 2*)

Assim, quando esta equação é comparada com a equação (2-26), verifica-se que o vértice da parábola é o ponto *V(3, 2)*.

A figura 2-21 mostra um esboço desta parábola

****

**Fig. 2-21 Parábola do exemplo 28**.

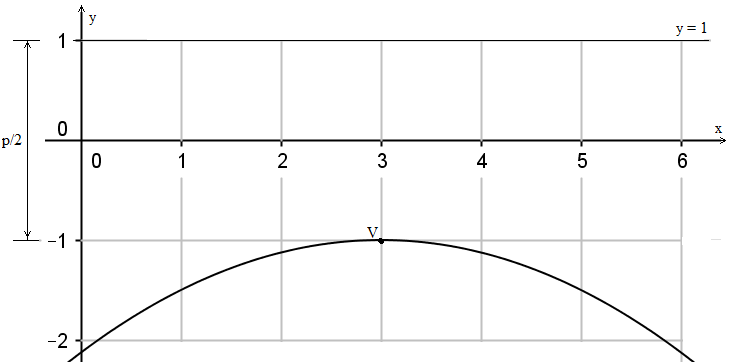
Exemplo 29: Determinar a equação da parábola de vértice *V*(*3,* *–1*), sabendo que a equação de sua diretriz é *y – 1 = 0*. Faça um esboço dessa parábola.

Solução: Pela diretriz dada pode-se concluir que o eixo da parábola é paralelo ao eixo *y* e, como o vértice é conhecido, pode-se fazer um esboço conforme a figura 2-22, donde se tira:

*xo= 3*, *yo* = *–1, p/2 = –2 ou p = –4*

Logo, utilizando a equação (2-26), obtém-se:

*(x – 3)2 = 2(–4)(y + 1) ou x2 – 6x + 8y + 17 = 0*



**Fig. 2-22: Parábola do exemplo 29.**

Exemplo 30: Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse cuja equação é

*4x2 + 9y2 – 8x – 36y + 4 = 0*

Solução: O primeiro passo é colocar esta equação na forma padrão, para isso agrupa-se os termos de mesma variável:

*4*(*x2 – 2x*) *+ 9*(*y2 – 4y*) *= –4*

Agora, completa-se os termos entre parênteses para se tornarem o quadrado de uma diferença:

*4*(*x2 – 2x + 1*) *+ 9*(*y2 – 4y + 4*) *= –4 + 4 + 36* ou *4*(*x – 1*)*2 + 9*(*y – 2*)*2 = 36*

Dividindo esta equação por *36*, obtém-se:



Desta equação se tira:

Centro: *C*(*1, 2*)*, a2 = 9* ou *a = 3, b2 = 4* ou *b = 2, c2 = a2 – b2* ou *c = √5*

Focos: *F1*(*1 – √5, 2*) e *F2*(*1 + √5, 2*)

Excentricidade: *e = c/a = √5 / 3*

Exemplo 31: Determinar a equação da hipérbole de vértices *A1*(*1*, *–2*) e *A2*(*5*, *–2*), sabendo que *F*(*6, –2*) é um de seus focos.

Solução: Em função dos dados pode-se esboçar o gráfico da hipérbole, conforme mostra a figura 2-23.

O centro da hipérbole é o ponto médio do segmento *A1A2*. Logo:

*C*(*3*, *–2*)

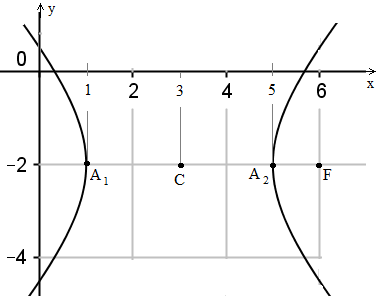
*a = d*(*C, A1*) *= 2*

*c = d*(*C, F*) *= 3*

*b2 = c2 – a2* ou *b2 = 5.*

Portanto, a equação da hipérbole é:





**Fig. 2-23: Hipérbole do exemplo 32.**

Exemplo 32: Determinar o centro, os vértices, os focos e um esboço gráfico da hipérbole de equação

*9x2 – 4y2 – 54x + 8y + 113 = 0*

Solução: Primeiro transforma-se esta equação à forma padrão. Assim:

(*9x2 – 54x*) *–* (*4y2 – 8y*) *=* *–113* ou *9*(*x2 – 6x*) *– 4*(*y2 – 2y*) *= –113*

As expressões entre parênteses são transformadas em quadrados de uma diferença, assim:

*9*(*x2 – 6x + 9*) *– 4*(*y2 – 2y + 1*) *=* *–113 + 81 – 4* ou *9*(*x – 3*)*2 – 4*(*y – 1*)*2 = –36*

Dividindo-se a última equação por (*–36)*, obtém-se:



Portanto, as seguintes informações são tiradas desta equação:

Centro: *C*(*3, 1*)

Eixo real: *a2 = 9* 🡪 *2a = 6*

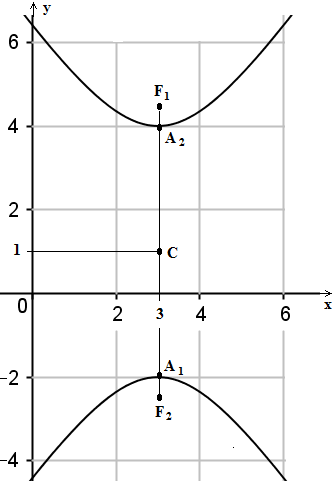
Eixo imaginário: *b2 = 4* 🡪 *2b = 4*

Distância focal: *c2 = a2 + b2* 🡪 *2c = √13*

E pelo esboço gráfico da figura 2-24, tira-se também:

Vértices: *A1*(*3, –2*)e *A2*(*3, 4*)

Focos: *F1*(*3, 1 – √13)* e *F2*(*3, 1 + √13*).



**Fig. 2-24**

**FORMA EXPLÍCITA DAS EQUAÇÕES DAS CÔNICAS**

As equações das seções cônicas vistas até aqui, podem ser escritas na forma explícita, ou seja, expressando-se *y* em função de *x* ou *x* em função de *y*.

Por exemplo, a equação de uma parábola, pode ser escrita na forma explicita já bastante conhecida, como:

*y = ax2 + bx + c*

Exemplo 34: A parábola com eixo paralelo ao eixo *y*, de vértice *V*(*2,* *–1*)e *p = 1/8* tem a equação na forma padrão:

(*x – 2*)*2 = ¼* (*y + 1*)

Expressando-se *y* em função de *x*, encontra-se:

*y = 4x2 – 16x + 15*

Exemplo 3: A equação da circunferência de raio igual a *2*, centrada na origem, na forma padrão é:



Expressando-se *y* em função de *x*, encontra-se:



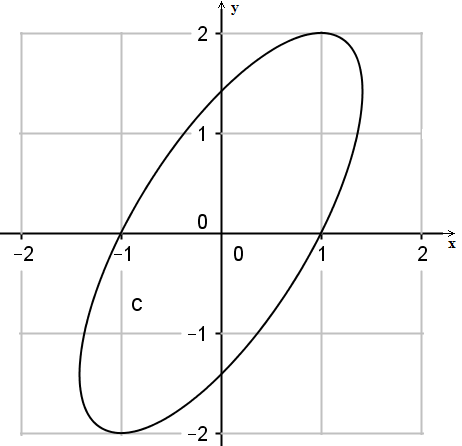
OBSERVAÇÃO: Todas as equações das cônicas podem ser expressas por uma equação quadrática com formato geral dado por:

*Ax2 + By2 +2Cxy + Dx + Ey + F = 0*

A presença do termo envolvendo o produto *xy*, chamado de *termo misto*, representa uma *rotação* da seção cônica em relação aos eixos cartesianos. Nesta situação, sua posição não é canônica e será estudada no capítulo 6. Por exemplo, a equação *x2 + 0,5y2 – xy – 1 =* 0 representa uma elipse centrada na origem, girada em relação aos eixos cartesianos, conforme mostra a figura 2-26.

Se *D = E = 0*, a cônica é central. Além disso, se *C = 0*, a cônica é central e está na posição canônica.

Existe a possibilidade de não haver valores reais de *x* e *y* que satisfaçam a equação geral. Por exemplo, *x2 + y2 + 1 = 0*. Nestes casos, dizemos que a equação não tem gráfico ou que tem um *gráfico vazio.*



**Fig. 2-25**

Exemplo 35: a equação quadrática dada por:

É uma parábola de vértice na origem, rotacionada de 45º no sentido anti-horário. O gráfico dela é mostrado na figura 2-27.

Imagem em branco e preto

Descrição gerada automaticamente com confiança baixa

**Fig. 2-27: Parábola rotacionada de 45º.**

OBSERVAÇÃO: Como a equação geral das cônicas apresenta uma expressão semelhante para todas, uma forma de identificar a cônica através da sua equação geral é utilizar a seguinte classificação:

*C2 – AB < 0 (Elipse)*

*C2 – AB = 0 (Parábola)*

*C2 – AB > 0 (Hipérbole)*

Pode-se mostrar que o ângulo de rotação, quando existe a presença do termo misto (*xy*) é dado por:

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



EQUAÇÕES: VETORIAL, PARAMÉTRICAS E REDUZIDA DA RETA:

Sendo ***po*** *=* (*xo, yo, zo*) um ponto da reta e ***v*** *=* (*a, b, c*) um vetor diretor (vetor paralelo)

Vetorial: ***p*** *=* ***po*** *+* ***v****t*,

Paramétricas: *x = xo + at, y = yo + bt, z = zo + ct*

Reduzidas: *y = mx + n, z = px + q*

EQUAÇÕES: VETORIAL, GERAL E PARAMÉTRICAS DO PLANO:

Sendo ***po*** *=* (*xo, yo, zo*) um ponto do plano e ***n*** *= (a, b, c)* um vetor normal ao plano

Vetorial: (***p*** *–* ***po****)* ***.******n*** = 0, Geral: *ax + by + cz = d*

Paramétricas: *x = xo + a1t1 + a2t2, y = yo + b1t1 + b2t2, z = zo + c=t1 + c2t2*

Onde ***v1*** *=* (*a1, b1, c1*) e ***v2*** *=* (*a2, b2, c2*) são 2 vetores não colineares do plano

ÂNGULO ENTRE RETAS, ÂNGULO ENTRE PLANOS E ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO:

Entre retas: o, Entre planos: o

Entre reta e plano: o

MENOR DISTÂNCIA ENTRE:

Ponto e reta:, Retas paralelas: recai no caso de ponto e reta

Retas reversas: , Ponto e plano:

EQUAÇÕES PADRÃO DAS CÔNICAS:

Parábola de vértice (*xo, yo*): (*x – xo*)*2 = 2p*(*y – yo*), Elipse de centro em (*xo, yo*):

Hipérbole de centro em (*xo, yo*):

**PROBLEMÁTICA**

1) Encontre a equação reduzida de cada uma das retas, dadas abaixo na forma vetorial. Esboce o gráfico de cada uma delas.

a) *(x, y) = t(2, 3)* b) *(x, y) = (1, 1) + t(1, –1)*  c) *(x, y) = (2, 0) + t(1, 1)*

2) Encontre as equações paramétricas da reta determinada pelos pontos

a) *(0, 0)* e *(3, 3)* b) *(1, –1, 1)* e *(2, 1, 1)* c) *(1, 2, –4)* e *(3, –1, 1)*

3) Encontre as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (*1, 6, 2*) e é paralela ao vetor

***v*** *=* (*5, –2, 1*)

4) Encontre uma equação vetorial da reta cujas equações paramétricas são

*x = 2 + 4t, y = –1 + t, z = t*

5) Encontre uma equação vetorial e as equações paramétricas do plano que passa pelos pontos

a) (*1, 1, 4*)*,* (*2, –3, 1*) e (*3, 5, –2)* b) (*3, 2, 1*), (*–1, –1, –1*) e (*6, 0, 2*)

6) Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto *P*(*3, 5, –2*) e é normal ao vetor

***n*** *=* (*1, 1, 4*)

7) Encontre a equação geral do plano que é paralelo ao plano *3x + 2y – z = 1* e passa pelo ponto *P*(*1, 1, 1*)

8) Encontre equações paramétricas da reta que é perpendicular ao plano *x + y + z = 0* e passa pelo ponto (*2, 0, 1*)

9) Determinar todos os elementos e fazer um esboço da parábola de equação *y2 + 6y – 8x + 1 = 0*

10) Determinar, no eixo *y*, um ponto eqüidistante dos pontos: *A*(*1, 1, 4*) e *B*(*–6, 6, 4*)

11) Calcular a distância do ponto *P*(*1, 2, 3*) à reta *r* dada por

*r: x = 1 – 2t, y = 2t, z = 2 – t*

12) Seja o triângulo *ABC* de vértices *A*(*–3, 1, 4*), *B*(*–4, –1, 0*) e *C*(*–4, 3, 5*). Calcular a medida da altura relativa ao vértice *A*.

13) Calcular a distância entre as retas *r* e *s* nos seguintes casos

a) *r* passa pelos pontos *A*(*1, 0, 1*) e *B*(*–1, –1, 0*) e *s* pelos pontos *C*(*0, 1, –2*) e *D*(*1, 1, 1*)

b) *r: x = 1 – t, y = 2 + 3t, z = –t* *s: eixo dos x*

14) Determinar a distância do ponto *P*(*2, –3, 5*) a cada um dos planos dados abaixo

a) *π1: 2x – 2y – z + 3 = 0* b) *π2: x + y + z = 0* c) *π3: 2x + y = 3*

15) Dado o tetraedro de vértices *A*(*1, 2, 1*), *B*(*2, –1, 1*), *C*(*0, –1, –1*)e *D*(*3, 1, 0*), calcular a medida da altura baixada do vértice *D* até a base *ABC*.

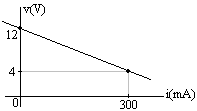
16) Calcular a distância entre os planos paralelos dados abaixo

*π1: 2x + 2y + 2z = 5, π2: x + y + z = 3*

17) Determinar a distância da reta *r: x = 3, y = 4*, aos seguintes planos

a) *xz* b) *yz* c) *π: x + y = 12*

18) A tensão elétrica em função da corrente elétrica numa determinada bateria de um carro é dada pela reta mostrada na figura P2-1. Encontre a equação da reta no plano *v×i*.



**Fig. P2-1**

19) Um plano *π* intersecta os eixos coordenados em (*2, 0, 0*), (*0, 3, 0*) e (*0, 0, 5*). Encontre a equação geral deste plano.

20) Encontre as interseções dos seguintes planos com os planos coordenados

a) *2x + 4y = 5*; b) *x + 2y + 6z = 12*; c) *y + 2z = 4*

21) Encontre a mediana relativa ao vértice *A* do triângulo formado pelos pontos *A(1, 1), B(2, 3) e C(4, 1)*.

[OBS: mediana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto].

22) Dados a reta e o plano abaixo, encontre o ponto onde a reta “fura” o plano.

Reta: *x = 1 – 2t y =* ***–****1 + t z = 2t*

Plano: *x + y + z = 1*

23) Encontre os pontos onde as retas abaixo “furam” os planos coordenados.

a) *x = 3 + t, y = t, z = –1 – 2t*

b) *y = 2x – 3, z = –4x + 5*

24) Prove que as retas abaixo são concorrentes e encontre o ponto de interseção entre elas

*r1: y =* *–3x + 2, z = 3x – 1*

*r2: x =* *–t, y = 1 + 2t, z = –2t*

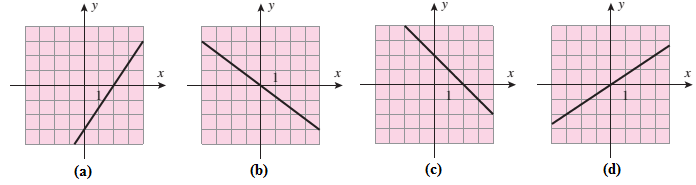
25) Calcular o valor de *n* para que seja de *30º* o ângulo que a reta *r* abaixo forma com o eixo *y.*



**Resposta***:*

26) A reta que passa pelos pontos *A*(*–2, 5, 1*)e *B*(*1, 3, 0*) é paralela à reta determinada por *C*(*3, –1, –1*) e *D*(*0, y, z*). Determinar o ponto *D.*

27) Encontre as equações das retas mostradas na figura P2-2. Considera-se cada quadrícula igual a uma unidade.



**Fig.P2-2**

28) Estabelecer a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:

a) foco *F(2, 0)* e diretriz *d: x+2 = 0* b) vértice *V(4, 1)* e diretriz *d: x + 4 = 0*

c) foco *F(6, 4)* e diretriz *d: y = –2* d) vértice *V(1, 3)*, eixo paralelo a *x*, passando por *P(–1, –1)*

29) Determinar os vértices *A1* e *A2*, o centro, os focos e a excentricidade das elipses:

**Resposta***: a) C(0, 0), A(0, +1), F(0, +√3 /2), e = √3 /2 b) C(0, 0), A(+5/3, 0), F(+4/3, 0), e = 4/5*

*c) C(-2, 2), A1(-2, -2), A2(-2, 6), F(-2, 2 + √15), e = √15 /4 d) C(1, 2), A1(-2, 2), A2(4, 2), F(1 + √5, 2), e = √5 /3*

a) *4x2 + y2 = 1* b) *9x2 + 25y2 = 25*

c) *16x2 + y2 + 64x – 4y + 52 = 0* d) *4x2 + 9y2 – 8x – 36y + 4 = 0*

30) Determinar os vértices, o centro, os focos e a excentricidade das hipérboles:

**Resposta***: a) A(+1, 0), F(+√2, 0), e = √2 b) A(0, +√3), F(0, +2), e = 2√3 /3*

*c) C(2, -1), A1(2, -5), A2(2, 3), F1(2, -6), F2(2, 4), e = 5/4*

*d) C(-2, 3), A1(-2, -3), A2(-2, 9), F(-2, 3 + 2√10), e = √10 /3*

a) *x2 – y2 = 1* b) 3x2 – y2 + 3 = 0

c) *16x2 – 9y2 – 64x – 18y + 199 = 0* d) *9x2 – y2 + 36x + 6y + 63 = 0*

31) Identifique e calcule o ângulo de rotação de cada uma das cônicas dadas abaixo.

**Resposta***: a) Elipse, ϴ = 45º b) Hipérbole, ϴ = 36,87º*

a) *5x2 + 4xy + 5y2 = 9* b) *11x2 + 24xy + 4y2 = 15*