**CAPÍTULO 5**

**DETERMINANTES**

5.1 INTRODUÇÃO

Historicamente, os determinantes apareceram primeiro no contexto de resolução de sistemas de equações lineares para um conjunto de variáveis em termos de outro conjunto de variáveis.

O uso de determinante, que é um número associado a uma matriz quadrada, difundiu-se bastante a partir do século XIX e mostrou-se extremamente útil para caracterizar muitas situações, como a de se saber se uma matriz é invertível, se um sistema admite ou não solução, o que será visto nas próximas seções.

5.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Seja considerar o sistema *ax = b* com *a ≠ 0*. A solução deste sistema é *x = b/a*. Observa-se que o denominador está associado à matriz dos coeficientes, ou seja, *A = [a].*

No sistema *2×2*, com *x1* e *x2* como incógnitas tem-se:

*a11x1 + a12x2 = b1*

*a21x1 + a22x2 = b2*

Que quando resolvido, encontra-se:



Observa-se que os denominadores são iguais e envolvem todas as entradas da matriz dos coeficientes, *A*, do sistema. O mesmo pode ser observado para um sistema *3×3* onde os denominadores de *x1, x2* e *x3* são iguais e associados à matriz dos coeficientes do sistema. Então, chamando esses denominadores de *det[A]*, tem-se:

*det[A] = a*, para *A1×1*.

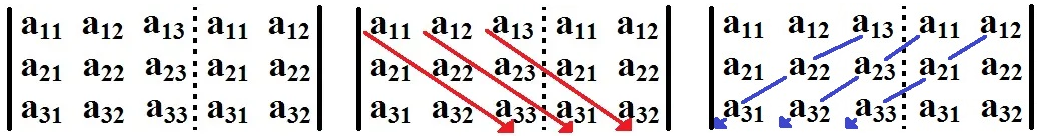
*det[A] = a11a22 – a12a21*, para *A2×2*.

*det[A] = a11a22a33 – a11a23a32 – a12a21a33 + a12a23a31 + a13a21a32 – a13a22a31,* para *A3×3*. (5-1)

Esse número que sempre aparecerá no denominador das incógnitas de qualquer sistema quadrado, com solução única, é chamado de determinante da matriz associada aos coeficientes de tal sistema.

**REGRA DE SARRUS PARA DETERMINANTE DE MATRIZES 3**

A regra de Sarrus consiste em reescrever a equação (5-1) separando-se os termos positivos dos termos negativos, o que, na prática consiste em escrever a matriz acrescida das duas primeiras colunas no seu lado direito e efetuar a soma dos produtos conforme mostram as setas das matrizes abaixo. O determinante será a diferença entre soma dos produtos das setas vermelhas e a das setas azuis.



Para uma matriz quadrada de ordem *n*, o conceito de determinante envolve muitos símbolos, o que dificulta sua definição e leitura, então, algumas propriedades e teoremas se fazem necessários para facilitar o seu cálculo como veremos a seguir.

**PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES**

I) Se todos as entradas de uma linha ou coluna são nulos, *det(A) = 0*

II) *det(AT) = det(A)*

III) Se *A* é uma matriz triangular, então *det(A)* é o produto das entradas na diagonal principal. Isso vale também para matrizes em bloco, sendo, neste caso, o produto dos determinantes dos blocos da diagonal principal.

IV) Se for multiplicada uma linha ou uma coluna da matriz *A,* por uma constante, então *det(A)* fica multiplicado por essa constante.

V) Uma vez trocada a posição de duas linhas ou duas colunas, o determinante troca de sinal.

VI) O determinante de uma matriz que tem duas linhas ou duas colunas iguais ou proporcionais, é nulo.

VII) Se *B* é a matriz que resulta de uma matriz *A* quando na linha *Ri* de *A* é aplicada a operação elementar *[E3]*, ou seja*, kRi + Rj → Rj*, então *det(B) = det(A)*.

VIII) *det(AB) = det(A)det(B)*

IX) *det(A-1) = 1/det(A)*

5.3 MENORES E COFATORES

Agora será visto um procedimento para calcular determinantes, que consiste em expressá-los em determinantes de ordem menor.

Definição: Se *A* é uma matriz quadrada, então o *menor* da entrada *aij*, denotado por *Mij,* é definido como o determinante da sub-matriz que resulta quando se elimina a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna de *A*. O número *Cij = (–1)i+jMij* é denominado o *cofator da entrada* *aij*.

Exemplo 1: Seja . Então, o menor da entrada *a11* é:

e o cofator correspondente é: *C11 = (–1)1+1M11 = 16*

O menor da entrada *a32* é:

e o cofator correspondente é: *C32 = (–1)3+2M32 = –26*

**EXPANSÃO EM COFATORES**

Também chamada de *expansão de Laplace*, segue o seguinte teorema:

Teorema: O determinante da matriz quadrada, *A,* é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna, por seus respectivos cofatores.

Este teorema pode ser expresso para uma matriz *An×n*, como:

*det(A) = a1jC1j + a2jC2j + ... + anjCnj*  (5-3)

onde a expansão foi feita ao longo da *j-ésima* coluna, ou

*det(A) = ai1Ci1 + ai2Ci2 + ... + ainCin*

onde a expansão foi feita ao longo da *i-ésima* linha.

Exemplo 2: Seja calcular o determinante da matriz a seguir, escolhendo-se a 1a coluna para cálculo dos cofatores. Então, se tem:

*= (1)(93) + (4)(42) + (7)( –3) = 240*

Exercício: Use a expansão de Laplace para encontrar o determinante da matriz



**Resposta***: –216*

**SIMPLIFICANDO EXPANSÕES EM COFATORES**

Pode-se introduzir zeros em uma matriz sem alterar o seu determinante, conforme a propriedade (VII), isto é, somando-se múltiplos apropriados de uma linha (ou coluna) a outra, utilizando a operação elementar *[E3]*.

Exemplo 3: Use uma expansão em cofatores para encontrar o determinante da matriz



Chamando as linhas de *R1, R2, R3* e *R4,* pode-se realizar as seguintes operações elementares sobre elas sem alterar o determinante, para fazer aparecer zeros na 1ª coluna:

*–3R2 + R1 → R1, 2R2 + R3 → R3* e *–3R2 + R4 → R4*

Então, o determinante agora será:



**DETERMINANTE POR ELIMINAÇÃO DE GAUSS**

Seja agora, calcular um determinante, reduzindo a matriz *A* à forma escalonada por linhas até torná-la uma matriz triangular superior, cujo determinante é fácil de calcular.

Exemplo 4: Seja calcular o determinante da matriz









Então, pela propriedade (III) tem-se: *det(A) =* (*–1)3(–55) = 165*

Exercício: Dada a matriz abaixo, subdivida-a em blocos tal que ela se torne quadrada por bloco e triangular, e então calcule o seu determinante.



**Resposta***: det(M) = –1080*

**TESTE PARA A INVERTIBILIDADE DE UMA MATRIZ**

O teste para invertibilidade utiliza o teorema a seguir:

Teorema: Uma matriz quadrada *A* é invertível se, e só se, *det(A) ≠ 0*

**TESTE PARA A INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES**

Um conjunto de vetores: *{v1, v2, ... vn}* é linearmente independente (*LI*) se nenhum dos vetores do conjunto puder ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores. Caso contrário, o conjunto é linearmente dependente (*LD*). O teste para a independência linear de vetores se baseia no teorema a seguir:

Teorema: Os vetores linhas ou os vetores coluna de uma matriz *A*, são *linearmente independentes* (*LI*) se, e só se, *det(A) ≠ 0*. Neste caso, o sistema *A****x*** *=* ***b*** tem sempre solução única para qualquer ***b***.

OBSERVAÇÃO: Se o determinante da matriz for nulo, ou se a matriz formada pelos vetores não for quadrada, então os vetores serão *linearmente dependentes* (*LD*).

Exemplo 5: Para o conjunto de vetores a seguir, determine se é linearmente independente.

1. ***v1*** *= (1, 2, 1),* ***v2*** *= (2, 5, 0),* ***v3*** *= (3, 3, 8)*
2. ***v1*** *= (1, 2,* –*1),* ***v2*** *= (6, 4, 2),* ***v3*** *= (4,* –*1, 5)*
3. ***v1*** *= (2,* –*4, 6),* ***v2*** *= (0, 7,* –*5),* ***v3*** *= (6, 9, 8),* ***v4*** *= (5, 0, 1)*

Solução (a): Tomando-se os vetores como colunas de uma matriz *A*, tem-se:



Como *det(A)≠ 0*, então os vetores são *LI*. O sistema formado por ela terá solução única.

Solução (b): A matriz fica:



Como *det(A) = 0*, então os vetores são *LD*. O sistema formado por ela não terá solução única ou será impossível.

Solução (c): A matriz formada não seria quadrada, portanto um sistema montado com ela teria mais incógnitas do que equações e, portanto, não teria solução única, assim os vetores são *LD*.

OBSERVAÇÃO: Se o número de vetores do conjunto é maior que a dimensão dos vetores, o conjunto será *LD*, pois a matriz não será quadrada.

**DETERMINANTE POR DECOMPOSIÇÃO LU**

No caso em que a matriz *A* tem uma decomposição *LU*, o determinante dessa matriz pode ser calculado, conforme a propriedade (VIII), como:

*det(A) = det(L).det(U)*

Exercício: A decomposição *LU* de uma matriz *A* resultaram nas matrizes:



Encontre a matriz *A* e o seu determinante.

**Resposta***: det(A) = 14*

5.4 REGRA DE CRAMER

O teorema a seguir fornece a regra de Cramer para a solução de sistemas lineares de *n* equações a *n* incógnitas.

Teorema: Se *A****x*** *=* ***b*** é um sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas, então o sistema tem uma solução única se, e somente se, *det(A) ≠ 0*, caso em que a solução é:



onde *Aj* é a matriz que resulta quando a j-ésima coluna de *A* é substituída por ***b***.

Exemplo 7: Resolva, usando a regra de Cramer, o seguinte sistema:

*x1 + x2 + x3 = 5*

*x1 – 2x2 – 3x3 =* –*1*

*2x1 + x2 – x3 = 3*

Solução:



Assim, a única solução do sistema é:

*x1 = det(A1)/det(A) = 4, x2 = det(A2)/det(A) = –2, x3 = det(A3)/det(A) = 3*

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS DETERMINANTES**

a) Se *A* é uma matriz *2×2*, então o valor absoluto do determinante de *A,* representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores-coluna de *A*, com seus pontos iniciais coincidentes. Ou seja, se ***c1*** é o vetor formado pela 1ª coluna de *A* e ***c2*** é o vetor formado pela 2ª coluna de *A*, então pode-se escrever:

*|det(A)| = Área do paralelogramo formado por* ***c1*** *e* ***c2****.*

b) Se *A* é uma matriz *3×3*, então o valor absoluto do determinante de *A,* é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores-coluna de *A*, com seus pontos iniciais coincidentes. Ou seja, se ***c1****,* ***c2*** *e* ***c3*** são os vetores colunas de *A*, então pode-se escrever:

*|det(A)| = |(****c1****,* ***c2****,* ***c3****)| = Volume do paralelepípedo formado pelos vetores* ***c1****,* ***c2***e***c3****.*

OBSERVAÇÃO: Nos dois casos se poderia utilizar os vetores-linha da matriz *A*. Por quê?

Exemplo 8: Determine a área do paralelogramo determinado pelos vetores ***u*** *= (1,2)* e ***v*** *= (4,3).*

Solução: Monta-se a matriz A *= [****u******v****]* e calcula-se a área pelo módulo do determinante de *A,* ou seja:

*Área = |det(A)| = |(1)(3) – (2)(4)| = |3 – 8| = 5*

Exercícios:

1) Encontre a área do paralelogramo de vértices *P1(*–*1, 2), P2(1, 7), P3(7, 8) e P4(5, 3)*

**Resposta***: 28*

2) Encontre o volume do paralelepípedo formado pelos vetores ***u*** *= (1, 1, –1),* ***v*** *= (2, 0 ,2)* e ***w*** *= (3, 2, 1)*

**Resposta***: 4*

5.5 INTRODUÇÃO AOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Serão discutidas nesta seção equações lineares da forma *A****x*** *= λ****x***, onde *λ* é um escalar. Essas equações aparecem numa variedade de aplicações importantes.

**PONTOS FIXOS DE UMA MATRIZ**

São os autovetores coluna, ***x***, soluções da equação:

*A****x*** *=* ***x*** (5-5)

Observe-se que o vetor nulo ***x*** *=* ***o*** é um ponto fixo de qualquer matriz *A*, pois *A****o*** *=* ***o***. Este ponto é chamado de *ponto fixo trivial.*

O problema principal consiste em se determinar se existem outros pontos fixos além do trivial. Para isso seja reescrever a equação (5-5) como:

***x*** *– A****x*** *=* ***o*** ou

(*I – A*)***x*** *=* ***o*** (5-6)

Que é um sistema linear homogêneo, cujas soluções são os pontos fixos de *A*.

Teorema: Se *A* é uma matriz *n× n*, então as seguintes afirmações são todas verdadeiras ou todas falsas:

1. *A* tem pontos fixos não triviais.
2. *I – A* é singular (não tem inversa).
3. *det(I – A) = 0*

Exemplo 9: Encontre os pontos fixos da matriz

Solução: utilizando a equação (5-6) tem-se:





Escrevendo-se em forma de equações, o sistema fica:

*0x1 + 0x2 = 0*

*–2x1 + 0x2 = 0*

Donde se tira os pontos fixos de *A* como sendo a solução desse sistema. Assim,



Exercício: Encontre os pontos fixos das seguintes matrizes

a) b) 

**Resposta***: a) Só o trivial**b)* ***x*** *= [2t t]T*

**AUTOVALORES E AUTOVETORES**

A questão agora é: se *A* é uma matriz *n×n*, para quais valores do escalar *λ*, se houver, existem *vetores não nulos* ***x*** em *Rn* tais que *A****x*** *= λ****x***?

Definição: Se *A* é uma matriz *n× n*, então um escalar *λ* é denominado *autovalor* (ou *valor próprio*) de *A* se existe um *vetor não nulo* ***x*** tal que *A****x*** *= λ****x***. Se *λ* é um autovalor de *A*, então cada vetor não nulo ***x*** é denominado um *autovetor* de *A,* associado a *λ*.

A maneira mais direta de encontrar autovalores de uma matriz *A* é reescrever a equação *A****x*** *= λ****x*** na forma:

*(λI – A)****x*** *=* ***o*** (5-7)

e então encontrar os valores de *λ*, se houver, para os quais esse sistema tem soluções não-triviais. Isso acontece, como já se viu, se:

*det(λI – A) = 0* (5-8)

A equação (5-8) é denominada de *equação característica* *de A*. Ela permite encontrar todos os autovalores da matriz *A*. Também, se *λ* é um autovalor de *A*, então a equação (5-7) tem um espaço-solução não-nulo, denominado de *autoespaço* de *A*, associado a *λ*.

OBSERVAÇÃO: como *λ* é um autovalor de *A* se, e só se, existe um vetor não-nulo ***x*** tal que *A****x*** *= λ****x***, segue que na equação *A****x*** *=* ***o*** tem-se que *λ = 0* é um autovalor de *A* se, e só se, *det(A) = 0*, já que esta equação não pode ter somente a solução trivial.

Propriedades dos autovalores:

I) Se A é uma matriz quadrada, então *A* e *AT* têm a mesma equação característica. Consequentemente elas têm os mesmos autovalores e autovetores.

II) Se *λ* é um autovalor de uma matriz invertível *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *1/λ* é um autovalor de *A-1* e ***x*** é um autovetor associado.

III) Se *λ* é um autovalor de *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *sλ* é um autovalor de *sA* para cada escalar *s* e ***x*** é um autovetor associado.

IV) Se *λ* é um autovalor de *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *λ – s* é um autovalor de *(A – sI)* para cada escalar *s* e ***x*** é um autovetor associado.

Exemplo 10: Encontre os autovalores e autovetores associados da matriz e esboce os autoespaços de *A* num sistema de coordenadas *xy*.

Solução: Usando-se (5-8) escreve-se:

*λI – A =* λ

Então, para *det(λI – A) = 0*, tem-se:

 ou *λ*2 *– 3λ – 10 = 0*

Logo, *λ = –2* e *λ = 5*

Para se encontrar os auto espaços ligados a esses autovalores, resolve-se o sistema:



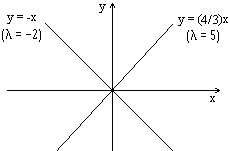
Para *λ = –2*, encontra-se *x = –t* e *y = t*, ou seja, os autovetores são:



Para *λ = 5*, encontra-se: *x = (3/4)t* e *y = t*, ou seja, os autovetores são:



A figura 5-1 mostra o esboço dos auto espaços para *λ = –2* e *λ = 5*



**Fig. 5-1: Autoespaços de uma matriz 2×2.**

Observe-se que quando se multiplica o autovetor ***x*** por *A*, para qualquer *λ*, encontra-se um vetor no mesmo auto espaço.

Exercícios:

1) Mostre que os vetores  são autovetores da matriz 

2) Esboçar os autos espaços associados aos autovalores da matriz

**Resposta***: Para λ = 2 é a reta y = –2x para λ = 3 é a reta x = 0 (eixo y)*

**NO MATLAB**

>>eig(A) 🡪 calcula os autovalores da matriz *A*.

>>[x,lambda]=eig(A) 🡪 produz uma matriz diagonal de autovalores e uma matriz *X* cujas colunas são os autovetores correspondentes de modo que *A\*x = x\*lambda.*

OBSERVAÇÃO: Quando uma matriz tem autovalores distintos, o de maior valor absoluto é chamado de *autovalor dominante* e o seu autovetor base associado a esse autovalor é chamado de *autovetor dominante*.

**AUTOVALORES DE MATRIZES TRIANGULARES**

Se *A* é uma matriz triangular ou diagonal, então *λI – A* é uma matriz triangular ou diagonal com entradas diagonais *λ – a11, λ – a22, ..., λ – ann*. Assim, a equação característica de *A* é:

*det(λI – A) = (λ - a11)( λ - a22) ... (λ - ann) = 0*

que implica que os autovalores de *A* são:

*λ1 = a11, λ2 = a22, ..., λn = ann*

Exemplo 11: Encontre a equação característica da matriz *A* e seus autovalores distintos.



Solução: Como a matriz é triangular, então a equação característica é:

*(λ – ½)(λ + 2/3)( λ – 6)2 = 0*

e, portanto, os autovalores distintos são: *λ = ½, λ = –2/3* e *λ = 6*

Se a matriz é triangular por bloco, sua equação característica é o produto das equações características das matrizes da diagonal principal.

Exercício: Use subdivisão triangular em bloco para encontrar a equação característica e os autos valores da matriz:



**Resposta***: (λ – 5)( λ – 3)2(λ + 3) = 0*

**AUTOVALORES DE POTÊNCIAS DE UMA MATRIZ**

Se *λ* é um autovalor de *A* e ***x*** um autovetor associado, então:

*A2****x*** *= A(A****x****) = A(λ****x****) = λ(A****x****) = λ(λ****x****) = λ2****x***

que mostra que *λ2* é um autovalor de *A2* e ***x***um autovetor associado. Em geral, tem-se o seguinte resultado:

Teorema: Se *λ* é um autovalor de uma matriz *A* com autovetor associado ***x*** e se *k* é um inteiro positivo qualquer, então *λk* é um autovalor de *Ak* com autovetor associado ***x***.

**POLINÔMIO CARACTERÍSTICO**

Se *A* é uma matriz *n× n,* então a forma expandida do determinante de *(λI – A)* é um polinômio de grau *n*, da forma:

*p(λ) = det(λI – A) = λn + c1λn-1 + ... + cn* (5-9)

Este polinômio é denominado *polinômio característico* *de A*.

Quando se tenta fatorar o polinômio característico *p(λ)*, pode ocorrer três casos distintos:

1. Fatoração em fatores reais distintos.

Exemplo 12: *p(λ) = λ3 + λ2* – *2λ = λ(λ2 + λ* – *2) = λ(λ* – *1)( λ + 2)*

1. Fatoração em fatores reais, mas alguns repetidos.

Exemplo 13: *p(λ) = λ6* – *3λ4 + 2λ3 = λ3(λ3* – *3λ + 2) = λ3(λ* – *1)2(λ + 2)*

1. Fatoração em que alguns fatores são números complexos (esses fatores são ditos *irredutíveis*).

Exemplo 14: *p(λ) = λ3 – 8 = (λ – 2)( λ2 + 2λ + 4) = (λ – 2)(λ + 1 – j√3)( λ + 1 + j√3)*

Onde *λ3 + 2λ + 4* é o fator irredutível sobre os números reais.

Teorema: Se *A* é uma matriz *n×n*, então o polinômio característico de *A* pode ser decomposto como:

*p(λ) = (λ – λ1)m1(λ – λ2)m2...( λ – λk)mk*.

onde *λ1, λ2, ..., λk*, são os autovalores distintos de *A* com *multiplicidades algébricas* *m1, m2, ..., mk* sendo que *m1 + m2 + ... + mk = n*.

A dimensão de cada autoespaço associado a cada autovalor é o que chamamos de *multiplicidade geométrica*.

OBSERVAÇÃO: Podem existir várias matrizes com o mesmo polinômio característico.

A *multiplicidade geométrica* nunca é maior que a multiplicidade algébrica, isto é, a multiplicidade geométrica de *λk* é menor ou igual à *mk.*

Exercício: Encontre algumas matrizes cujo polinômio característico é:

p(*λ) = λ(λ – 2)2(λ + 1)*

**Sugestão***: pense em matrizes triangulares.*

**NO MATLAB**

>>p = poly(A) 🡪 fornece os coeficientes do polinômio característico da matriz *A* na ordem decrescente de graus.

**AUTOVALORES DE MATRIZES *2×2* E *3×3***

Seja agora deduzir a fórmula para os autovalores de matrizes *2×2* e discutir algumas propriedades geométricas de seus autoespaços.

O polinômio característico de uma matriz qualquer de ordem 2,

é

*det(λI – A) = λ2 – (a + d) λ + (ad – bc)*

que pode ser expresso como:

*det(λI – A) = λ2 – tr(A)λ + det(A)*

Portanto, a equação característica de *A* é:

*λ2 – tr(A)λ + det(A) = 0* (5-10)

Então, os autovalores de *A* são as raízes da equação do 2o grau em (5-10).

Para matrizes *3×3* pode ser mostrado que a equação característica de *A* é:

*λ3 – tr(A)λ2 + (M11 + M22 + M33)λ – det(A) = 0* (5-11)

onde *M11, M22 e M33* são os menores dos termos *a11, a22 e a33*, respectivamente.

Exemplo 15: Encontre os autovalores das seguintes matrizes:

1. b) c)

Solução (a): *tr(A) = 7* e *det(A) = 12*, de modo que *λ2 – 7λ +12 = 0*. E, portanto, os autovalores de *A* são: *λ = 4 e λ = 3*.

Solução (b): *tr(B) = 2* e *det(B) = 1*, de modo que *λ2 – 2λ + 1 = 0*. Portanto, o único autovalor de *B* é *λ = 1*, de multiplicidade algébrica *2*.

Solução (c): *tr(C) = 4* e *det(C) = 13,* de modo que *λ2 – 4λ + 13 = 0*. E, portanto, os autovalores de *C* são:

*λ = 2 + 3i e λ = 2 – 3i*

Exercício: Usando a equação (5-11) encontre a equação característica da matriz:



**Resposta***: λ3 – 13λ2 + 31λ – 17 = 0*

**AUTOVALORES DE MATRIZES *2×2* SIMÉTRICAS**

Toda matriz *n×n* simétrica com entradas reais tem autovalores reais.

Por enquanto, será visto o caso das matrizes de dimensão *2×2*.

Se *A* é uma matriz simétrica da forma:



então *A* tem um autovalor repetido, *λ = a*, sendo seu auto espaço o *R2*.

Se *A* é simétrica*,* não sendo da forma anterior, com entradas reais, terá sempre dois autovalores distintos e os autos espaços associados a esses autovalores são *retas perpendiculares* pela origem de *R2*.

Exemplo 16: Esboce os autos espaços da matriz simétrica

Solução: Como *tr(A) = 6* e *det(A) = 5*, então a equação característica de *A* é:

*λ2 – 6λ + 5 = (λ – 1)( λ – 5) = 0*

e, portanto, os autovalores são: *λ = 1 e λ = 5*. Para encontrar os autos vetores associados, resolve-se o sistema:

, primeiro com *λ =1* e depois com *λ = 5*

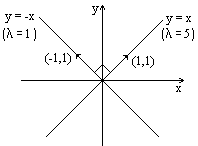
Com *λ = 1* encontramos *x = –t* e *y = t*, que são equações paramétricas da reta *y =* –*x*.

Com *λ = 5* encontramos *x = t* e *y = t*, que são equações paramétricas da reta *y = x*.

Observe-se na figura 5-2 que as retas *y = –x* e *y = x* são perpendiculares. Em forma de vetor pode-se escrever estas retas como:

***x*** =  e ***x*** = 

Então, os vetores geradores ***v1*** *=*  e ***v2*** *=*  dos dois autos-espaços, são ortogonais.



**Fig. 5-2: Auto espaços de matrizes simétricas 2×2**

# EXPRESSÃO DO DETERMINANTE E TRAÇO EM TERMOS DE AUTOVALORES

Se *A* é uma matriz *n×n* com autovalores *λ1, λ2, ..., λn* (repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica), então:

1. *det(A) = λ1m1λ2m2... λnmn*
2. *tr(A) = m1λ1 + m2λ2 + ... + mnλn*

onde *m1, m2, ..., mn* são as multiplicidades algébricas de cada raiz do polinômio.

Exemplo 17: Encontre o determinante e o traço de uma matriz *3×3* cujo polinômio característico é:

*p(λ) = λ3 – 3λ + 2*

Solução: Esse polinômio pode ser fatorado como:

*p(λ) = (λ – 1)2(λ + 2)*

de modo que os autovalores repetidos de acordo com sua multiplicidade são: *λ1 = 1*, *λ2 = 1 e λ3 = –2*. Assim,

*det(A ) = λ12λ2 = (1)2(–2) = –2 e tr(A) = 2λ1 + λ2 = 2(1) + (–2) = 0*

Solução alternativa: se *p(λ)* é o polinômio característico de uma matriz *An×n,* então *tr(A)* é o negativo do coeficiente de *λn-1* e *det(A)* é o termo constante de *p(λ)* se *n* é par e o negativo do termo constante se *n* é ímpar.

**AUTO ESPAÇO DE MATRIZES 3×3**

Os auto espaços de uma matriz 3×3 podem ser retas ou planos, conforme sua multiplicidade geométrica.

Exemplo 18: Encontre as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores da matriz



Solução: O polinômio característico dessa matriz é:

*p(λ) = λ3 – 5λ2 + 8λ – 4*, ou, na forma fatorada:

*p(λ) = (λ – 1)(λ – 2)2*

portanto, *λ = 1* tem multiplicidade algébrica *1* e *λ = 2* tem multiplicidade algébrica *2*.

Para se encontrar os auto espaços resolve-se a equação característica:



Assim, para *λ = 1* tem-se o auto espaço:

***x*** *=* *(–2t, t, t) = t(–2, 1, 1)* que é uma reta na origem, então a multiplicidade geométrica é *1*

Para λ = 2 tem-se o auto espaço:

***x*** *= (–s, t, s) = s(–1, 0, 1) + t(0, 1, 0)* que é um plano na origem, então a multiplicidade geométrica é *2.*

(\*) 5.6 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Matrizes diagonais desempenham um papel importante em muitas aplicações porque elas representam os tipos mais simples de operadores lineares que serão estudados no capítulo 6.

**MATRIZES SEMELHANTES**

Se *A* e *C* são matrizes quadradas de mesmo tamanho, diz-se que *C* é semelhante a *A* se existe uma matriz invertível *P* tal que *C = P–1AP*

OBSERVAÇÃO: Se *C* é semelhante a *A*, então também *A* é semelhante a *C*. Ou seja, da equação anterior pode-se tirar que:

*A = PCP–1*

Existem várias propriedades básicas de matrizes semelhantes que justificam esse nome. Por exemplo, matrizes semelhantes têm:

1. Mesmo determinante
2. Mesmo posto
3. Mesmo traço
4. Mesmo polinômio característico
5. Mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades algébricas e geométricas.

Teorema: Se *C = P–1AP* e *λ* é um autovalor de *A* e de *C*, então:

1. Se ***x*** é um autovetor de *C* associado a *λ*, então *P****x*** é um autovetor de *A,* associado a *λ*.
2. Se ***x*** é um autovetor de *A,* associado a *λ*, então *P–1****x*** é um autovetor de *C* associado a *λ*.

**DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES**

Será visto aqui uma aplicação de autovalores e autovetores para *diagonalizar uma matriz*.

Para diagonalizar uma matriz *A* tem-se que encontrar uma matriz invertível *P* tal que *P–1AP* seja uma matriz diagonal. Se *P* existir diz-se que *A* é diagonalizável. Denotando a matriz diagonal por *D*, então escreve-se:

*D = P–1AP* (5-12)

Se for multiplicado os dois membros da equação (5-12) por *P*, na frente dos dois membros, e depois por *P–1,* atrás dos dois membros, encontra-se uma decomposição para *A* da forma:

*A = PDP–1*

OBSERVAÇÃO: Como a equação (5-12) concorda com a definição de matrizes semelhantes, então pode-se dizer que a matriz diagonal *D* é semelhante à matriz *A*.

A chave para diagonalizar uma matriz está com a dimensão dos autoespaços, conforme o teorema a seguir:

Teorema: Uma matriz *A* de tamanho *n×n* é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas de seus autovalores for igual a *n*.

Desse teorema pode-se concluir que uma matriz é diagonalizável se seus autovalores são todos distintos ou se ela tem *n* autovetores linearmente independentes.

Por exemplo, a matriz do exemplo 18 é diagonalizável, pois a soma de suas multiplicidades geométricas é *3* que é igual a dimensão da matriz.

**ALGORÍTIMO PARA DIAGONALIZAR UMA MATRIZ**

1º Passo: Encontrar os autovalores de *A*.

2º Passo: Encontrar os autovetores bases de *A*, que são linearmente independentes, denotados por: ***p1, p2****, ...* ***pn***, que serão os vetores colunas de *P.*

3º Passo: Formar a matriz *P = [****p1******p2*** *...* ***pn****].*

4º Passo: Encontrar a matriz inversa *P–1.*

5º Passo: Formar a matriz *D =* *P–1AP* que tem como entradas na diagonal os autovalores associados aos vetores ***p1****,* ***p2****, ...,* ***pn***.

Exemplo 19: Diagonalizar a matriz:



Solução: A equação característica de *A* é *λ2 – 5λ + 6 = 0*, cujos autos valores são:

*λ1 = 2* e *λ2 = 3*

Para cada autovalor encontrado resolve-se a equação (*λI – A)****x*** *=* ***o***, para encontrarmos os autosvetores. Assim, tem-se:

Para *λ1 = 2* ***x*** *= (t, 2t) = t(1, 2)*, onde o vetor base é ***p1*** *= (1, 2)*.

Para *λ2 = 3* ***x*** *= (t, t) = t(1, 1)*, onde o vetor base é ***p2*** *= (1, 1)*.

Portanto, pode-se formar as matrizes:



Logo,



ou



Exemplo 20: Diagonalizar a matriz do exemplo 18.

Solução: Do exemplo 18 tira-se os vetores base:

***p1*** *= (–2, 1, 1)* para *λ =1* e ***p2*** *= (–1, 0, 1)* e ***p3*** *= (0, 1, 0)* para *λ = 2*

Esses vetores são *LI*, então pode-se formar a matriz *P* e *P–1:*



Portanto,



Exercício: Encontre as multiplicidades algébricas e geométricas dos autovalores da matriz *A* e mostre que ela não é diagonalizável.



**Resposta**: *λ1 = 2, λ2 = 3, λ3 = 3,* ***x*** *= t(1/8, –1/8, 1) e* ***x*** *= t(0, 0, 1)*

**DIAGONALIZAÇÃO ORTOGONAL**

*Dizemos que uma matriz A é ortogonalmente* diagonalizável, se existe uma matriz *P* ortogonal, tal que *D = P–1AP*, onde *D* é uma matriz diagonal. Mas, se *P* é ortogonal, podemos escrever que:

*D = PTAP* ou *A = PDPT*

Logo:

*AT = (PDPT)T = (PT)TDTPT = PDPT = A*

O que mostra que uma matriz ortogonalmente diagonalizável é *necessariamente simétrica*.

Teorema: (a) Uma matriz é ortogonalmente diagonalizável se, e só se, é simétrica.

(b) Se *A* é uma matriz simétrica, então autos vetores de autos valores diferentes são ortogonais.

OBSERVAÇÃO: Não esquecer que se *P* é ortogonal, seus vetores colunas formam um *conjunto ortonormal*.

Exemplo 21: A matriz simétrica abaixo, tem autovalores *λ1 = –3 e λ2 = 2,* com autovetores bases associados***x1*** *= (1, –2) e* ***x2*** *= (2, 1)*.



Portanto:

***p1*** *=* ***x1****/||****x1****|| = (1/√5, –2/√5) e* ***p2*** *=* ***x2****/||****x2****|| = (2/√5, 1/√5)*

Assim, a matriz ortogonal é



**POTÊNCIAS DE UMA MATRIZ DIAGONALIZÁVEL**

Como já vimos, se *A* é diagonalizável, então *A = PDP–1*. Logo,

*A2* = *(PDP–1)2 = (PDP–1) (PDP–1) = PD(P–1PD) P–1 = PD2 P–1*

Esse procedimento pode ser generalizado para a *n-ésima* potência, ou seja,

*An =* *PDn P–1*

Exemplo 22: Utilizando a matriz do exemplo 19, encontrar *A6*.

Solução: Encontrando *D6* temos:



Portanto:



Teorema de Cayley-Hamilton: Qualquer matriz quadrada satisfaz sua equação característica, ou seja, se *A* é uma matriz de dimensão *n* cuja equação característica é:

*λ n + c1 λn-1 + c2 λn-2 + ... + cn = 0*

Então:

*An + c1An-1 + c2An-2 + ... + CnI = O*

Onde *O* é a matriz nula.

Exemplo 23: Uma matriz *A* tem o polinômio característico: *p(λ) = λ3 – 8λ2 + 21 λ – 18*

Então, pelo teorema de Cayley-Hamilton temos que:

*A3 – 8A2 + 21A – 18I = O*.

Essa equação pode ser usada para expressar *A3* e todas as potências maiores, ou seja,

*A3 = 8A2 – 21A + 18I*

*A4 = AA3 = A(8A2 – 21A + 18I)*

*= 8A3 – 21A2 + 18A*

*= 8(8A2 – 21A + 18I) – 21A2 + 18A*

*= 43A2 – 15A + 144I*

Também podemos utilizar a equação característica de *A* para calcular sua inversa, assim:

*A3 – 8A2 + 21A – 18I = O*

*A3 – 8A2 + 21A = 18I*

*A(A2 – 8A + 21I) = 18I*

*A(1/18) (A2 – 8A + 21I) = I*

Portanto: *A–1 = (1/18) (A2 – 8A + 21I)*

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



MENORES E COFATORES:

Definição: Se *A* é uma matriz quadrada, então o *menor* da entrada *aij*, denotado por *Mij,* é definido como o determinante da sub-matriz que resulta quando eliminamos a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna de *A*. O número *Cij =* (*–1*)*i+jMij* é denominado o *cofator da entrada* *aij*.

DETERMINANTE UTILIZANDO EXPANSÃO EM COFATORES:

Teorema: O determinante da matriz quadrada *A* é igual à soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna, por seus respectivos cofatores.

REGRA DE CRAMER:

Teorema: Se *A****x*** *=* ***b*** é um sistema linear de *n* equações a *n* incógnitas, então o sistema tem uma solução única se, e somente se, *det*(*A*) *≠ 0*, caso em que a solução é:



onde *Aj* é a matriz que resulta quando a j-ésima coluna de *A* é substituída por ***b***.

PONTOS FIXOS DE UMA MATRIZ:

São os vetores coluna, ***x***, solução da equação: (*I – A*)***x*** *=* ***o***

AUTO VALORES E AUTO VETORES:

A equação característica: *det*(*λI – A*) *= 0* permite encontrar os auto valores, *λ,*da matriz *A*.

A equação:(*λI – A*)***x*** *=* ***o*** permite encontrar os auto vetores, ***x,*** da matriz *A*.

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ:

Matriz 2×2: *λ2 – tr*(*A*)*λ + det*(*A*) *= 0,* Matriz 3×3: *λ3 – tr*(*A*)*λ2 +* (*M11 + M22 + M33*)*λ – det*(*A*) *= 0*

Matriz triangular: (*λ – a11*)( *λ – a22*) *...* (*λ – ann*) *= 0*

DETERMINANTE E TRAÇO EM FUNÇÃO DE *λ*: *det*(*A*) = *λ1λ2 ... λn; tr*(*A*) *= λ1 + λ2 + ... + λn*

**PROBLEMÁTICA**

1. Calcule o determinante da matriz

a) Pela regra de Sarrus.

b) Em relação à Segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

1. Dada as matrizes e , calcule:

a) *det(A) + det(B)* b) *det(A + B)*

1. Sabendo que o determinante de uma matriz triangular *An×n* é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal (isso vale também para matrizes em bloco), calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) (b)

1. Calcule o determinante da matriz *B*, utilizando a expansão em co-fatores.



1. Somando múltiplos apropriados de uma linha (ou coluna) a outra linha (ou coluna) para introduzir zeros na matriz, encontre o determinante da matriz *A:*



1. Encontre os autovalores da matriz
2. Nas matrizes a seguir determine se houver os pontos fixos não-triviais:

(a)  (b)  (c)  (d) 

1. Dada as matrizes e , verifique que ***x*** é um autovetor de *A* e encontre o autovalor associado.
2. Dadas as matrizes a seguir, encontre a equação característica, os autovalores e as respectivas multiplicidades algébricas.

(a)  (b)  (c) 

1. Sem fazer contas, encontre o polinômio característico e os autovalores das matrizes:

(a)  (b)  (c) 

1. Para as matrizes simétricas dadas a seguir esboce os auto espaços no sistema de coordenadas *xy* e use inclinações para confirmar que são retas perpendiculares.

(a)  (b) 

1. Suponha que uma matriz *A,* tenha polinômio característico *p(λ) = λ2 + 3λ – 4*. Encontre os autovalores das seguintes matrizes

(a) *A2* (b) *A3* (c) *AT*



1. Mostre que se *λ* é um autovalor da matriz *A* e ***x*** é um vetor associado, então:

*λ = [(A****x****)•****x****]/||****x****||2*

1. Prove que se *A* é uma matriz quadrada, então *A* e *AT* têm o mesmo polinômio característico. [Sugestão: considere a equação característica *det(λI – A) = 0* e use propriedades do determinante].
2. Prove que se *λ* é um autovalor de uma matriz invertível *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *1/λ* é um autovalor de *A-1* e ***x*** é um autovetor associado.
3. Prove que se *λ* é um autovalor de *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *sλ* é um autovalor de *sA* para cada escalar *s* e ***x*** é um autovetor associado.
4. Prove que se *λ* é um autovalor de *A* e ***x*** é um autovetor associado, então *λ – s* é um autovalor de *(A – sI)* para cada escalar s e **x** é um autovetor associado.

18) Suponha que a matriz *A* tenha um polinômio característico *p(λ) = λ2 + 3λ – 4*. Utilizando as propriedades dos autovalores, encontre os autos valores das seguintes matrizes:

(a) *A-1* (b) *A-3* (c) *A – 4I* (d) *5A* (e) *4AT + 2I*

19) Utilizando a equação (5-11), determine a equação característica da matriz:



20) O que pode ser dito sobre o gráfico da equação abaixo, onde *x1, y1, x2* e *y2* são constantes



21) Prove que (*x1, y1*), (*x2, y2*) e (*x3, y3*) são pontos colineares se, e só se, a equação abaixo for satisfeita



22) Utilizando uma divisão por bloco para formar uma matriz triangular, encontre o polinômio característico e os autos valores da matriz:



23) Para as matrizes abaixo encontre as multiplicidades algébricas e geométricas.



(\*) 24) Quais matrizes do problema 23 são diagonalizáveis?

(\*) 25) Encontre a matriz *P* que diagonaliza cada uma das matrizes abaixo e determine *P–1AP*.



(\*) 26) Encontre a matriz *P* que diagonaliza cada uma das matrizes abaixo

