**CAPÍTULO 1**

**VETORES**

1.1 INTRODUÇÃO

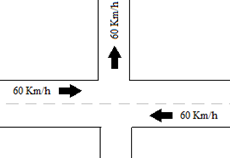
Há dois modos de se apresentar a noção de vetor

1. *Lista de números indexados*: por exemplo, uma lista de dados sobre a localização e o clima de um município, dada por *17, 23, 25, 14, 70*, nessa ordem, pode ser simbolicamente representada por:

***d*** *= (d1, d2, d3, d4, d5) = (17, 23, 25, 14, 70)*

Onde *d1, d2, d3, d4 e d5 representam, respectivamente, latitude, longitude, temperatura, pressão e umidade relativa do ar* daquele município num dado instante. Uma lista deste tipo é chamada de *lista indexada,* *tabela linear* ou *vetor*. Note que esta lista requer uma dada *ordem* dos dados apresentados.

(2) *Vetores na física*: muitas grandezas físicas como temperatura, massa e corrente elétrica, são representadas apenas por um número real e são chamadas de *escalares*. Entretanto, há grandezas como *força, velocidade* e *campo elétrico,* que requerem não só um valor numérico, mas também uma *direção* e um *sentido* para sua descrição completa. Por exemplo, a figura 1-1 mostra objetos se movendo com velocidade de mesma intensidade (*60 Km/h*), porém em direções e/ou sentidos diferentes. Portanto, são vetores distintos, embora tenham a mesma intensidade. Este é um bom exemplo de vetores na física.



**Fig. 1-1: Objetos com velocidades distintas.**

1.2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM VETOR

No espaço *bidimensional* ou *tridimensional*, os vetores podem ser representados geometricamente por *setas*: sendo o comprimento da seta proporcional à magnitude (parte numérica sem sinal) do vetor, denominado de *norma* do vetor, e a direção e o sentido da seta indica a direção e o sentido do vetor. A origem da seta é denominada de *ponto inicial* e a ponta da seta é denominada de *ponto final*. A figura 1-2 mostra a representação geométrica de um vetor onde:

*A* é o ponto inicial ou *origem*

*B* é o ponto final ou *extremidade*

*||****v****||* é a *norma* do vetor, que equivale ao comprimento AB da seta.



**Fig. 1-2: Representação geométrica de um vetor**

OBSERVAÇÃO: Ao longo de todo o texto, um vetor será sempre denotado por uma letra minúscula em **negrito** ou por duas letras maiúsculas em **negrito**, neste caso, a primeira letra indica o ponto inicial e a segunda o ponto final do vetor. Por exemplo, ***AB*** representa um vetor com ponto inicial *A* e ponto final *B*, conforme a figura 1-2.

Nas diversas aplicações distinguem-se dois tipos de vetores: o *vetor fixo* e o *vetor livre*.

**VETOR FIXO**

É um vetor cujo efeito físico depende do ponto de aplicação, além da magnitude, direção e sentido. A figura 1-3 ilustra esta situação, onde uma força de mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido provoca efeitos diferentes pelo fato de estar sendo aplicada em vértices diferentes do bloco.



**Fig. 1-3: Vetor físico**

**VETOR LIVRE**

É um vetor que só depende da magnitude, direção e sentido. Ele não é afetado pelo processo de *translação* que possa experimentar, ou seja, ele pode *correr paralelamente* para qualquer região do espaço, mantendo o comprimento e o sentido. Apenas este tipo de vetor será considerado neste estudo.

**VETORES IGUAIS OU EQUIVALENTES**

Geometricamente falando, dois ou mais vetores livres são ditos *iguais* ou *equivalentes* se eles forem representados por setas paralelas de mesmo sentido e mesmo comprimento. Em termos de uma lista ordenada, dois vetores são iguais se os seus componentes de mesma ordem forem iguais. Escrevemos ***v*** *=* ***u*** para indicar que os vetores ***u*** e ***v*** são iguais ou equivalentes.

**VETOR NULO**

O vetor cujo ponto inicial e ponto final coincidem, tem norma nula e é denominado de *vetor nulo*. Representa-se este vetor pela letra minúscula em negrito, ***o***. Então, pode-se escrever que *||****o****|| = 0*.

O vetor nulo pode assumir qualquer direção e qualquer sentido.

**VETOR OPOSTO**

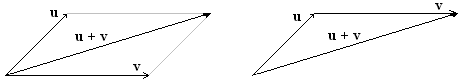
Geometricamente falando, diz-se que dois vetores ***u*** e ***v*** são opostos se os dois tiverem a mesma direção e a mesma norma, porém sentidos contrários. Isto pode ser denotado por: ***u*** *= –****v*** ou ***v*** *= –****u***.

**ADIÇÃO DE VETORES**

As operações *geométricas*, de soma e subtração, efetuadas com vetores, são todas *originárias das leis da física*. Para a adição na forma geométrica existem basicamente duas regras:

(1) *Regra do paralelogramo*: Se dois vetores ***u*** e ***v***, de direções diferentes, têm o *mesmo ponto inicial*, então eles podem ser vistos como lados adjacentes de um paralelogramo e a sua soma (***u*** *+* ***v***) é o vetor representado pela seta que une os pontos iniciais de ***u*** e ***v*** ao vértice oposto do paralelogramo formado por eles. A figura 1-4(a) ilustra essa situação.

(2) *Regra do triângulo*: Se dois vetores ***u*** e ***v***, de direções diferentes, estão posicionados de modo que o *ponto final do primeiro vetor (****u****) coincide com o ponto inicial do segundo vetor (****v****)*, então (***u*** *+* ***v***) será dado pela seta que une o ponto inicial de ***u*** ao ponto final de ***v***, como mostrado na figura 1-4(b). Na verdade, estas duas regras são equivalentes, pelo fato de que os vetores em questão são livres.



(a) (b)

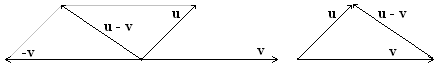
**Fig. 1-4: Adição de vetores; (a) Regra do paralelogramo; (b) Regra do triângulo**

**SUBTRAÇÃO DE VETORES**

A subtração entre dois vetores consiste na soma entre um vetor e o oposto do outro, ou seja,

***u*** *–* ***v*** *=* ***u*** *+ (–****v****)*

onde (–***v***) é o vetor oposto ao vetor ***v***, ou seja, tem a mesma magnitude, a mesma direção, porém sentido contrário a ***v***. A figura 1-5 exemplifica a subtração entre dois vetores ***u*** e ***v*** usando a regra do paralelogramo e usando a regra do triângulo. Nos dois casos, as origens dos vetores coincidem.



1. (b)

**Fig. 1-5: Subtração de vetores; (a) regra do paralelogramo; (b) regra do triângulo**

OBSERVAÇÃO: Para se somar geometricamente mais de dois vetores, a maneira mais simples é fazer coincidir o ponto final do 1º vetor com o ponto inicial do 2º, o ponto final do 2º, com o ponto inicial do 3º e assim sucessivamente. O vetor resultante será representado pela seta com origem no ponto inicial do 1º vetor e extremidade no ponto final do último vetor.

**MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR**

Se ***u*** é um vetor não nulo e *λ* é um número real (escalar) não nulo, então *λ****u*** é um vetor tal que:

(1) ||*λ****u***|| = |*λ|||****u****||*, onde ||***u***|| é a *norma* de ***u***

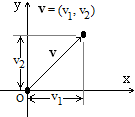
(2) se *λ > 0*, *λ****u*** tem mesma direção e mesmo sentido de ***u***

(3) se *λ < 0, λ****u*** tem mesma direção de ***u***, porém, sentido contrário.

**VETORES EM SISTEMAS DE COORDENADAS**

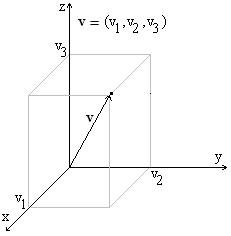
A descrição de um vetor no espaço bidimensional ou tridimensional fica facilitada se for adotado um sistema de coordenadas para tal.

(1) No *espaço bidimensional* *(R2*) adotam-se dois eixos ortogonais, *x* e *y*, conforme mostra a figura 1-6. Os escalares *v1* e *v2* são os *componentes escalares* do vetor ***v*** associados às direções *x* e *y* respectivamente, equivalendo às projeções ortogonais sobre esses eixos, e o vetor ***v*** é representado por uma dupla ordenada expressa por ***v*** *= (v1, v2)*. Note-se que o ponto inicial do vetor livre foi trazido para a origem do sistema de eixos. Desta forma, a *dupla ordenada* (*v1, v2*) representa também o ponto *(x, y)* no plano; só depende da conotação que se queira dar.



**Fig. 1-6: Vetor no espaço bidimensional (*R2*)**

(2) *No espaço tridimensional (R3)* usam-se três eixos: *x*, *y* e *z*, ortogonais entre si, adotando-se o sistema de mão direita para indicar o sentido positivo de cada eixo, conforme mostra a figura 1-7. Os escalares *v1, v2* e *v3* são os componentes escalares do vetor ***v*** associados às direções *x*, *y* e *z*, respectivamente, equivalendo às projeções ortogonais sobre esses eixos. Analiticamente escreve-se o vetor como: ***v*** *= (v1, v2, v3)*. A *tripla ordenada* (*v1, v2, v3*) pode estar representando o ponto *(x, y, z)* no espaço, quando o ponto inicial do vetor coincide com a origem; só depende da conotação que se queira dar.



**Fig. 1-7: Vetor no espaço tridimensional (*R3)***

OBSERVAÇÃO: Se o componente de um vetor é nulo numa dada direção, então o vetor é ortogonal a esta direção. Por exemplo, o vetor ***u*** *= (2, 0, 3)* é ortogonal ao eixo *y*; o vetor ***v*** *= (3, 0, 0)* é ortogonal aos eixos *y* e *z*. Neste segundo caso, pode-se dizer também que o vetor é paralelo ao eixo *x*.

**OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM VETORES**

Para somar ou subtrair vetores, algebricamente, conhecidos os seus componentes, basta somar ou subtrair os componentes de mesma ordem. Por exemplo, sejam dois vetores no *R3* dados por ***u*** *= (1, 2, 3)* e ***v*** *= (–4, 5, –7)*, então, tem-se que:

***u*** *+* ***v*** *= (1, 2, 3) + (–4, 5, –7) = (1 – 4, 2 + 5, 3 – 7) = (–3, 7, –4)*

***u*** *–* ***v*** *= (1, 2, 3) – (–4, 5, –7) = (1 + 4, 2 – 5, 3 + 7) = (5, –3, 10)*

Para a multiplicação por um escalar, cada componente do vetor é multiplicado pelo escalar. Assim:

*2****u*** *= 2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)*

***v*** *= (–4, 5, –7) = (–2, 5/2, –7/2)*

Exercícios

1) Dados os vetores ***u*** *= (4, 2)* e***v*** *= (2, 5)*, calcular ***u*** *+* ***v***e *2****u***. Faça um esboço gráfico dos vetores resultantes destas operações.

2) Dados os vetores ***u*** *= (–1, 2, 1),* ***v*** *= (–2, 3, 4)* e***w*** *= (3, 1, –2)*, encontrar os seguintes vetores

a) ***u*** *– 2****v*** *–* ***w*** b) *2****u*** *– (****v*** *+* ***w****)*

**VETOR DADO POR DOIS PONTOS QUAISQUER**

Se o ponto inicial do vetor não está na origem dos eixos e sim num ponto qualquer *P1(x1, y1, z1)* enquanto o ponto final está no ponto *P2(x2, y2, z2)*, então o vetor ***v = P1P2*** exemplificado na figura 1-8 será dado por:

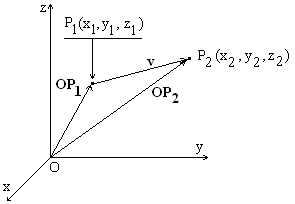
***v*** *=* ***P1P2*** *=* ***OP2*** *–* ***OP1***

Onde ***OP2*** = *(x2, y2, z2)* e ***OP1*** = *(x1, y1, z1)*.

Portanto: ***v*** *= (x2, y2, z2) – (x1, y1, z1) = (x2 – x1, y2 – y1, z2 – z1)*

Onde *P1* indica a origem e *P2* indica o destino.

Assim, o vetor ***v*** é a diferença entre o ponto final e o ponto inicial.

****

**Fig. 1-8: Vetor com sua origem num ponto qualquer**.

Exemplo 1: Dados os pontos *A(1, 4, 2)* e *B(3, 1, 4)*, encontre um vetor que aponta de *A* para *B*.

Solução: ***AB*** *= A – B = (3, 1, 4) – (1, 4, 2) = (2, –3, 2)*

Exercícios

1) Dados os pontos *A(2, 5)* e *B(4, 1)*, esboce o vetor ***AB*** definido por estes dois pontos bem como um vetor equivalente a ***AB*** que passe na origem.

2) Esboce três paralelogramos distintos, onde três de seus vértices são: *A(0,0), B(–1, 3)* e *C(1, 2)*, e encontre o quarto vértice correspondente a cada um dos paralelogramos.

**Resposta***: D(2, –1), E(–2, 1), F(0, 5)*

**VETOR EM *Rn***

Embora não se possa ver um espaço de quatro ou mais dimensões ainda assim é possível estender ideias geométricas de duas e três dimensões trabalhando com as propriedades algébricas dos *n* componentes de um vetor cujo conjunto formado por eles constitui o que se chama de *ênuplas*. Desta forma pode-se ter um vetor, pertencente ao espaço *n-dimensional* dado por:

***v*** *= (v1, v2, v3,..., vn)*

Onde *v1, v2, v3,..., vn*  são os componentes indexados do vetor ***v***.

Exemplo 2: *Imagens digitalizadas*: as imagens na tela de um monitor são constituídas de “pixel” (pontos endereçáveis na memória de um computador) que podem ser representados por um vetor de cinco componentes: ***v*** *= (x, y, c, s, b)*, onde *x, y* são as coordenadas do ponto na tela; *c* é a cor; *s* é a saturação e *b* é o brilho.

**PRINCIPAIS PROPRIEDADES DE VETORES NO *Rn***

Se ***u****,* ***v***e***w*** são vetores no *Rn* e se *a* e *b* são escalares, então:

(I) ***u*** *+* ***v*** *=* ***v*** *+* ***u*** (V) *(a + b)****v*** *= a****v*** *+ b****v***

(II) *(****u*** *+* ***v****) +* ***w*** *=* ***u*** *+ (****v*** *+* ***w****)* (VI) *a(****v*** *+* ***w****) = a****v*** *+ a****w***

(III) ***u*** *+* ***o*** *=* ***o*** *+* ***u*** *=* ***u*** (VII) *a(b****u****) = (ab)****u***

(IV) ***u*** *+ (–****u****) =* ***o*** (VIII) *(1)****u*** *=* ***u***

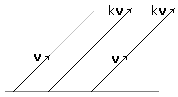
**VETORES PARALELOS E VETORES COLINEARES**

Dois vetores de *Rn* são ditos *paralelos* ou *colineares* se um dos vetores é um *múltiplo escalar* do outro, isto é, se *λ* é um escalar qualquer, então os vetores ***u*** e ***v*** são paralelos se:

***u*** *= λ****v***ou***v*** *= λ****u***

Isto implica dizer que a razão entre os componentes de mesma ordem dos dois vetores é constante. Por exemplo, se ***u*** *= (u1, u2, ..., un)* e ***v*** *= (v1, v2, ... vn)*, então ***u*** e ***v*** são paralelos ou colineares se:

OBSERVAÇÃO: (1) O vetor nulo, ***o***, é paralelo a qualquer vetor do *Rn*. (2) Não se faz distinção entre vetor colinear e vetor paralelo já que o vetor livre não sofre mudanças ao experimentar uma translação, conforme mostra a figura 1-9.



**Fig. 1-9: Vetores paralelos ou colineares**

Exemplo 3: Verificar se são paralelos os vetores ***u*** *= (–2, 3, –4)* e***v*** *= (–4, 6, –8)*

Solução: observa-se que os componentes de mesma ordem são proporcionais, isto é,

Portanto, ***u*** *= ½****v*** ou ***v*** *= 2****u***. Então os vetores são paralelos (ou colineares).

Exercícios:

1) Encontrar, usando vetores, os valores das coordenadas do ponto médio, *M(xm, ym)*, do segmento de reta de extremidades *A(x1, y1)* e *B(x2, y2)*.

**Resposta***:* e

2) Demonstrar, utilizando vetores, que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

**COMBINAÇÃO LINEAR**

Um vetor ***w*** é uma *combinação linear* dos vetores ***v1****,* ***v2****, ...,* ***vn***, se ***w*** puder ser expresso na forma:

***w*** *= c1****v1*** *+ c2****v2*** *+ ... + cn****vn*** (1-1)

Onde os escalares *c1, c2, ..., cn* são denominados de *coeficientes* da combinação linear e os vetores ***v1, v2, ..., vn*** são ditos geradores de ***w***. Neste caso, o conjunto formado pelos vetores ***w, v1, v2, vn***, é dito ser *linearmente dependente (LD)*. Caso não seja possível expressar qualquer um dos vetores de um conjunto em função dos demais, este conjunto será *linearmente independente (LI)*.

OBSERVAÇÃO: No sentido geométrico, um conjunto de vetores é *LI*, se os vetores deste conjunto apontam em direções diferentes. Por exemplo: no *R2*, dois vetores são *LI* se não forem paralelos à mesma reta; mais de dois vetores no *R2*, nunca serão *LI*. No *R3*, três vetores são *LI* se não forem paralelos ao mesmo plano; mais de três vetores no *R3*, nunca serão *LI*.

Exemplo 4: Composição de cores *RGB*: as cores primárias de uma imagem colorida: *vermelha-R* (“Red”), *Verde-G* (“Green”) e *azul-B* (“Blue”) podem ser representadas pelos vetores ***r*** *= (1,0,0), vermelho puro;* ***g*** *= (0,1,0), verde puro* e ***b*** *= (0,0,1), azul puro,* respectivamente. Qualquer outra cor pode ser obtida pela combinação linear destas três cores como segue:

***c*** *= c1****r*** *+ c2****g*** *+ c3****b*** *= c1(1, 0, 0) + c2(0, 1, 0) + c3(0, 0, 1) = (c1, c2, c3)*

Onde *0 < ci < 1* são os coeficientes que representam a porcentagem de cada cor primária (pura) na mistura. Por exemplo, algumas cores resultantes dentre várias combinações citam-se:

Amarela = *(1, 1, 0)*, Ciano = *(0, 1, 1)* e Magenta = *(1, 0, 1)*

Exercício: Encontre os escalares *c1* e *c2* de modo que o vetor ***w*** *= (–12, 6)* seja uma combinação linear dos vetores ***u*** *= (2, –4)* e***v*** *= (–5, 1)*. Os vetores ***u*** e ***v*** são *LI*?

**Resposta**: *c1 = –1* e *c2 = 2* ; ***u*** e ***v*** são *LI*.

**NOTAÇÕES ALTERNATIVAS PARA VETORES**

A notação ***v*** *= (v1, v2, ..., vn)* expressa o vetor por uma lista ordenada chamada de *ênuplas*. Como um vetor no *Rn* é somente uma lista de *n* números (componentes) ordenados de uma maneira conveniente, então qualquer notação que exiba os seus componentes em sua ordem correta é uma alternativa válida. Assim, por exemplo, pode-se ter as seguintes formas matriciais:

(1) *Vetor como uma matriz linha*:

(2) *Vetor como uma matriz coluna*:

1.3 NORMA, PRODUTO ESCALAR E ORTOGONALIDADE

**NORMA DE UM VETOR**

No sentido geométrico, *norma* é o comprimento da seta que representa o vetor, ou seja, é a distância entre o ponto inicial e o ponto final deste vetor calculado da seguinte forma:

No R2: , onde ***v*** *= (v1, v2)*

No R3: , onde ***v*** *= (v1, v2, v3)*

Para dimensões acima de *três*, embora não se possa dar uma visão geométrica para o vetor, a mesma regra é utilizada para o cálculo de sua norma. Assim, de uma forma geral, tem-se para um vetor no *Rn*:

(1-2)

Onde *v1, v2, ..., vn*, são os componentes do vetor ***v***.

Com as seguintes propriedades:

1. *||****v****|| > 0* (a norma nunca é negativa)
2. *||****v****|| = 0* se, e somente se, ***v*** *=* ***o***
3. *||λ****v****|| = |λ|||****v****||*

Exemplo 5: Encontrar a norma do vetor ***v*** *= (√2,* –*2,* –*3)*.

Solução:

Exercícios:

1) Dado os vetores ***u =*** *(1, 2, –1)* e***v*** *= (–3, 4, –2)* encontre as seguintes normas:

a) *||****u****||* b) *||****v****||* c) *||****u*** *+* ***v****||* d) *||****u****|| + ||****v****||*

**Resposta***: a) 2,45 b) 5,38 c) 7,00 d) 7,83*

2) Os três vértices de um triângulo estão localizados em *A(–1, 2, 5), B(–4, –2, –3)* e *C(1, 3, –2)*. Encontre o perímetro desse triângulo.

**Resposta***: 23,90 uc*

**VETOR UNITÁRIO**

Um vetor ***v*** é dito *unitário* se *||****v****|| = 1*. No sentido geométrico se diz que seu comprimento é igual a *1*.

Se ***v*** *≠* ***o***, então se pode obter um vetor unitário com mesma direção e sentido de ***v***, denominado de *versor* de ***v***, fazendo-se:

(1-3)

Exemplo 6: Encontrar o versor do vetor ***v*** *= (2, 1, –2)*

Solução: *||****v****|| =* 

***av*** *=* ***v*** *= (2/3, 1/3, –2/3)*

**BASE CANÔNICA**

Base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independente (LI), a partir do qual se consegue gerar qualquer vetor desse espaço. A base mais utilizada é a base canônica, onde os vetores do conjunto são unitários e ortogonais dois a dois.

Num sistema de coordenadas no *R2* ou *R3*, os vetores unitários nas direções positivas dos eixos *x, y* e *z*, representados por ***ax****,* ***ay***e***az***, respectivamente, formam uma base *ortonormal* (os vetores são ortogonais entre si e unitários) denominada de base canônica. No *R3,* por exemplo, estes vetores são:

***ax*** *= (1, 0, 0)* ***ay*** *= (0, 1, 0)* ***az*** *= (0, 0, 1)*

Qualquer vetor no *Rn* pode ser escrito como uma combinação linear destes vetores. Por exemplo, se ***v*** *= (2, –3, 4)*, então, na forma canônica, pode-se representá-lo por:

***v*** *= 2****ax*** *– 3****ay*** *+ 4****az***

OBSERVAÇÃO: Usa-se também a notação ***i****,* ***j***e***k***, para indicar, respectivamente, os vetores canônicos nas direções *x, y* e *z*.

Os vetores unitários da forma ***e1*** *= (1, 0, 0, ... , 0),* ***e2 =*** *(0, 1, 0, ... , 0), ...,* ***en*** *= (0, 0, 0, ... ,1)*, são ortogonais dois a dois, e formam a base canônica do *Rn*.

Exercícios

1) Duas cargas elétricas geram num dado ponto do espaço, os campos elétricos (dados em *V/m*)

***E1*** *= 3****ax*** *– 2****ay*** *+* ***az*** e ***E2*** *=* ***ax*** *+ 5****ay*** *– 4****az***

Encontre o campo elétrico resultante nesse ponto.

**Resposta***: 4****ax*** *+ 3****ay*** *– 3****az***

2) Encontre a intensidade do campo elétrico resultante do exercício 1.

**Resposta***: √34 = 5,83*

**PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES**

É um tipo de produto entre vetores que será muito útil para encontrar ângulos entre vetores e para determinar se dois vetores são ortogonais, entre outras aplicações. O produto escalar é definido da seguinte forma:

Se ***u*** *= (u1, u2, ..., un)* e***v*** *= (v1, v2, ..., vn)* são vetores do *Rn*, os dois com a mesma dimensão, então o *produto escalar* entre eles, representado por ***u·v***, ou por *<****u****,* ***v****>*, é dado pela equação:

***u .v*** *= u1v1 + u2v2 + ... + unvn* (1-6)

Note-se que o resultado deste produto é um *número real* (*escalar*).

Exemplo 7: *Cálculo dos dígitos verificadores do CPF*: o cálculo utiliza o produto escalar de vetores, seguindo os seguintes procedimentos:

Seja o *CPF: 992 205 552 – d1d2*, e seja determinar os dígitos *d1* e *d2*.

1º Passo: definimos o vetor ***a*** com os dígitos do CPF:

***a*** *= (9, 9, 2, 2, 0, 5, 5, 5, 2)*

e o vetor ***b***com os números naturais de *1 a 9:*

***b*** *= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)*

2º Passo: faz-se o produto escalar: ***a .b =*** *164*

3º Passo: calcula-se o primeiro dígito: 🡪 *d1 = 0*

4º Passo: elimina-se o primeiro dígito do CPF e acrescenta-se d1 no final.

Assim, define-se um novo vetor: ***c*** *= (9, 2, 2, 0, 5, 5, 5, 2, 0)* e, com***b*** *= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)*, repete-se os passos 2 e 3 para encontrar:

🡪 *d2 = 4*

Portanto, o CPF completo será: 992 205 552 *– 04*

OBSERVAÇÃO: Se o resto da divisão for *10* ou *0*, o dígito verificador será *0*.

Exercícios

1) Encontre os dígitos verificadores dos seguintes CPF:

a) *067 464 702 – d1d2 b) 984 034 758 – d1d2*

**Resposta***: 53* e *61*

2) Dado o vetor ***u*** *= (2, m, –1)* e os pontos *A(–4, 1, 3)* e *B(3, –2, 2)*, determinar o valor de *m* tal que:

***u .AB*** *= 6*

**Resposta***: m = 3*

**PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR**

Sejam ***u****,* ***v*** e***w*** três vetores quaisquer e *λ* um escalar qualquer. Então se verificam as seguintes propriedades:

1. ***u .v*** *=* ***v .u***
2. ***v . v*** *= ||****v****||2*
3. ***u .*** *(****v*** *+* ***w****) =* ***u . v*** *+* ***u .w***
4. *λ(****u . v****) = (λ****u****)* ***.v =*** *(λ****v****)* ***.u***
5. ***v . v*** *> 0*, e ***v . v*** *= 0* se, e somente se, ***v*** *=* ***o***
6. ***o .v*** *=* ***v . o*** *= 0*

Exercícios

1) Utilizando as propriedades anteriores, provar que:

(a) *||****u*** *–* ***v****||2 = ||****u****||2 – 2****u · v*** *+ ||****v****||2*

(b) ||***u*** *+* ***v***||2 = ||***u***||2 + *2****u******· v* +** ||***v***||2

(c) (***u*** *+* ***v***) ***·*** (***u*** *–* ***v***) = ||***u***||2 – ||***v***||2

2) Utilizando os resultados do exercício 1, encontre ***u.v*** sabendo que *||****u*** *+* ***v****|| = 1* e *||****u*** *–* ***v****|| = 5*

**Resposta***: –6*

**ÂNGULO ENTRE VETORES**

Se ***u*** e ***v*** são dois vetores não nulos, com suas *origens coincidentes,* então definimos o ângulo entre eles como o *menor ângulo* não negativo, *θ*, calculado pela fórmula:

(1-7)

Demonstração: considerando-se a figura 1-11, tem-se, segundo a lei dos cossenos:

*||****v*** *–* ***u****||2 = ||****u****||2 + ||****v****||2 – 2||****u****|| ||****v****||cosθ* (1-8)

Também, conforme exercício anterior (1-a) tem-se que:

*||****v*** *–* ***u****||2 = ||****v****||2 – 2****u . v*** *+ ||****u****||2* (1-9)

Igualando-se as equações (1-9) e (1-8), tira-se que:

***u . v*** *= ||****u****|| ||****v****||cosθ* (1-10)

Assim, da equação (1-10), tira-se o *cosθ* para se obter a equação (1-7).

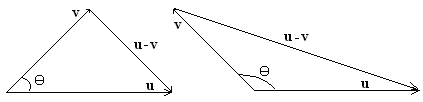
OBSERVAÇÃO: (a) a equação (1-10) também é outra definição para o produto escalar de dois vetores.

(b) Se ***u .v >*** *0*, então *cosθ > 0*, o que implica em *0o < θ < 90º*. [Figura 1-11(a)].

(c) Se ***u .v <*** *0*, então *cosθ < 0*, o que implica em *90º < θ < 180º*. [Figura 1-11(b)].

(d) como *–1* ≤ cos*θ ≤ 1*, então: *|****u.v****| ≤ ||****u****|| ||****v****||*. Esta desigualdade é conhecida como

*desigualdade de Cauchy-Schwarz*.



(a) (b)

**Fig. 1-11: Ângulo entre dois vetores: (a) ângulo agudo; (b) ângulo obtuso**

Exemplo 8: utilizando vetores, encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas de tamanho *a*.

Solução: localizando um dos vértices do cubo na origem do sistema de eixos coordenados, com suas arestas coincidindo com os eixos, então as arestas que concorrem neste vértice podem ser representadas pelos vetores:

***vx*** *= (a, 0, 0)* no *eixo x*, ***vy*** *= (0, a, 0)* no *eixo y* e ***vz*** *= (0, 0, a)* no *eixo z*

Portanto, a diagonal que parte da origem até o vértice oposto será representada pelo vetor ***d*** *= (a, a, a)* e o ângulo desta diagonal com uma das arestas, por exemplo ***vx***, será:



Logo, *θ ≈ 54,7º*

Observe-se que este ângulo independe do tamanho da aresta.

Exercícios

1) Os pontos *A, B* e *C* são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede *10 cm*. Calcule o produto escalar dos vetores ***AB***e***AC***.

**Resposta***: 50*

2) Dado os pontos *A(1, 1), B(3, 2)* e *C(2, 3)* encontre o ângulo entre os vetores:

(a) ***AB***e***AC*** (b) ***AB***e***CA***

**Resposta***:* (a) *cosθ = 4/5; θ = 36,87º* (b) *cosθ = –4/5; θ = 143,13º*

3) Sabendo que o ângulo entre os vetores ***u*** e ***v*** é de *60º*, e sem usar nenhuma fórmula, determine o ângulo entre os vetores:

(a) ***u*** e ***–v*** (b) ***–u*** e ***v*** (c) ***u*** e ***3v***

**Resposta***: 120º, 120º, 60º*

**COSSENOS DIRETORES E ÂNGULOS DIRETORES DE UM VETOR**

Ângulos diretores de um vetor ***v*** são os ângulos *α, β* e *γ* que ***v*** forma com a direção positiva dos eixos *x, y* e *z*, respectivamente. Assim, se ***v*** *= (x, y, z)*, os ângulos de ***v*** com os vetores unitários ***ax****,* ***ay*** e ***az***, serão os ângulos diretores, que podem ser calculados pela equação (1-7), resultando em:

cos*α = x/||v|| cosβ = y/||v|| cosγ = z/||v||*

Assim, o vetor ***v*** também pode ser representado pelos seus cossenos diretores como:

***v*** *=* (||***v***||cos*α, ||****v****||cosβ, ||****v****||cosγ*)

Exercícios:

1) Calcule os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor ***v*** *= (6, –2, 3)*.

**Resposta***: 31º, 107º, 65º*

2) Mostre que o versor de um vetor ***v***, em função de seus cossenos diretores é dado por ***av*** *= (cosα, cosβ, cosγ)* e, como consequência, mostre que: *cos2α + cos2β + cos2γ = 1*

Exercício: Um vetor forma um ângulo de *60º* com o eixo *x* e *30º* com o eixo *y*. Encontre o ângulo que ele forma com o eixo *z*.

**Resposta***: 90º*

**ORTOGONALIDADE**

Dois vetores ***u*** e ***v*** no *Rn* são ditos *ortogonais* se o produto escalar entre eles for nulo, isto é:

***u .v =*** *0* (1-11)

No sentido geométrico, ou seja, no *R2* ou *R3*, isto implica dizer que os vetores formam entre si um ângulo de *90o* , isto é, eles são perpendiculares entre si.

Um conjunto não vazio de vetores no *Rn* é denominado *conjunto ortogonal* se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal. Além disso, se todos os vetores deste conjunto forem unitários, o conjunto é dito *conjunto ortonormal*. O conjunto formado pelos vetores canônicos, por exemplo, é um conjunto ortonormal.

Exercício: Determinar todos os vetores que são ortogonais aos vetores ***v1*** *= (1, –1, 0)* e***v2*** *= (1, 0, 1)*

**Resposta***: (x, x, –x)*

**DESIGUALDADE TRIANGULAR**

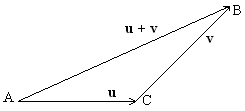
Seja um triângulo qualquer formado pelos vetores ***u****,* ***v***e***u*** *+* ***v***, conforme mostra a figura 1-12. Então, como em qualquer triângulo, um lado nunca é maior que a soma dos outros dois, pode-se escrever que:

*||****u*** *+* ***v****|| < ||****u****|| + ||****v****||* (1-13)

Deste teorema conclui-se que a menor distância entre dois pontos é a linha reta. Por exemplo, na figura 1-12, se o ponto *C* está fora da reta *AB*, isso significa que:

*AB < AC + CB* (1-14)

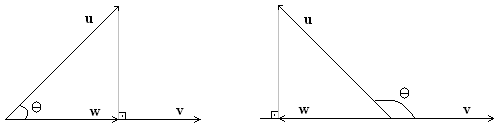
Portanto, a única condição para que a igualdade seja satisfeita *(AB = AC + CB)* é que o ponto *C* esteja sobre *AB*. Isto implica na condição de alinhamento dos pontos *A, B* e *C*.



**Fig. 1-12: Desigualdade triangular.**

**PROJEÇÃO DE UM VETOR SOBRE OUTRO**

Sejam ***u***e***v*** dois vetores não nulos e *θ* o ângulo entre eles. Pretende-se calcular o vetor ***w*** que representa a projeção de ***u*** sobre ***v***. A figura 1-13 ilustra duas situações possíveis de projeção de ***u*** sobre ***v***.



(a) (b)

**Fig. 1-13: projeção de *u* sobre *v***

Do triângulo retângulo da figura 1-13 tira-se:

*||****w****|| = ||****u****||cosθ =* (1-15)

Como ***w*** é colinear a ***v***, então se pode escrever:

***w*** *= λ****v***ou *||****w****|| = |λ| ||****v****||* ou *|λ| =* (1-16)

Desta forma, substituindo (1-15) em (1-16) encontra-se:

*λ =* , então:

***w*** *= λ****v*** *=* (1-17)

A equação (1-17) fornece o vetor ***w*** como sendo a projeção do vetor ***u*** sobre o vetor ***v***. Inversamente, para se obter a projeção do vetor ***v*** sobre o vetor ***u*** substitui-se, na equação (1-17), ***u*** por ***v*** e ***v*** por ***u***.

Exemplo 10: Dada uma reta passando pelos pontos *A(1, 2)* e *B(–2, 3)*, encontre o ponto desta reta que está mais próximo do ponto, fora da reta, *Po(1, 1)*.

Solução: Encontramos os vetores: ***v*** *=* ***AB*** = (*–3, 1)* e***u*** *=* ***APo*** *= (0, –1).* Então, calculamos o vetor ***w***, como sendo a projeção de ***u*** sobre ***v***. Assim, a extremidade de ***w*** será o ponto procurado. Portanto:

***w*** *=*

Seja *P(x, y)* a extremidade do vetor ***w***, então:

***AP*** *=* ***w*** 🡪 *(x – 1, y – 2)*  🡪

**(\*) ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT**

Dado um conjunto de vetores {***w1****,* ***w2****, ...,* ***wn***}, tal que cada vetor ***wk*** não possa ser escrito como uma combinação linear dos demais, ou seja, um conjunto *LI*, deseja-se encontrar, a partir deste conjunto, um outro conjunto {***v1****,* ***v2****, ...,* ***vn***} que seja ortogonal, isto é, tal que os vetores ***vk*** sejam ortogonais dois a dois. Este procedimento que permite encontrar os vetores ***vk*** é denominado de ortogonalização de Gram-Schmidt. Tal procedimento segue os seguintes passos:

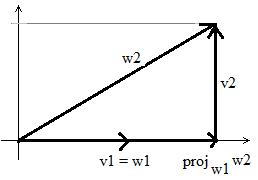
1º passo: Fazer ***v1*** *=* ***w1***

2º passo: Como sugere a figura 1-14, encontra-se ***v2*** ortogonal a ***v1***, fazendo

***v2*** *=* ***w2*** *– proj****w1w2***

3º passo: ***v3*** *=* ***w3*** *– proj****w2w3***

E assim sucessivamente.



**Fig. 1-14: Ortogonalização de vetores.**

Exemplo 11: Dado os vetores ***w1*** *= (1, 1, 1),* ***w2*** *= (0, 1, 1)* e ***w3*** *= (0, 0, 1)*, encontre um conjunto ortonormal a partir destes vetores.

Solução: Seguindo os procedimentos de Gram-Schmidt, encontra-se:

***v1*** *= (1, 1, 1)* ***v2*** *= (–2/3, 1/3, 1/3)* ***v3*** *= (0, –1/2, 1/2)*

Tem-se assim, um conjunto de vetores ortogonais. Para tornar o *conjunto ortonormal*, basta se dividir os componentes de cada vetor por suas respectivas normas. Então, obtém-se:

***av1*** *=* (*1/√3, 1/√3, 1/√3*)***av2*** *=* (*–2/√6, 1/√6, 1/√6*)***av3*** *=* (*0, –1/√2, 1/√2*)

1.4 PRODUTO VETORIAL E PRODUTO MISTO

**PRODUTO VETORIAL**

Um produto específico do *R3*, chamado de *produto vetorial*, é definido da seguinte maneira:

Seja ***u*** *= x1****ax*** *+ y1****ay*** *+ z1****az***e***v*** *= x2****ax*** *+ y2****ay*** *+ z2****az***, então se define o produto vetorial de ***u*** com ***v***, representado por ***u×v***(ou***u****∧****v***)*,* o vetor dado por:

***u****×* ***v*** *= (y1z2 – y2z1)****ax*** *– (x1z2 – x2z1)****ay*** *+ (x1y2 – x2y1)****az*** (1-18)

Para efeito de memorização e facilidade no cálculo, a equação (1-18) pode ser expressa pelo determinante de 3ª ordem:

(1-20)

Exemplo 12: dados os vetores ***u*** *= 5****ax*** *+ 4****ay*** *+ 3****az***e***v*** *=* ***ax*** *+* ***az***, encontre o produto vetorial ***u****×****v.***

Solução: Utilizando a equação (1-20), encontra-se:

***u****×****v*** *= (4 – 0)****ax*** *– (5 – 3)****ay*** *+ (0 – 4)****az*** *= 4****ax*** *– 2****ay*** *– 4****az***

Note-se que, se for trocada a ordem deste produto, obtém-se:

***v****×****u*** *= (0 – 4)****ax*** *– (3 – 5)****ay*** *+ (4 – 0)****az*** *= – 4****ax*** *+ 2****ay*** *+ 4****az***

O que resulta num vetor oposto ao anterior, ou seja, ***u****×****v*** *=* – *(****v****×****u)***

**PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL**

Algumas das propriedades do produto vetorial vistas a seguir, estão diretamente relacionadas às propriedades dos determinantes. Assim, tem-se:

(I) ***u****×* ***u*** *=* ***0***, para qualquer ***u***

É fácil se verificar pela equação (1-20) que, neste caso, o determinante terá duas linhas iguais, resultando assim num determinante nulo.

(II) ***u****×* ***v*** *=* –*(****v****×****u)***

Isso equivale a trocar a posição de duas linhas no determinante da equação (1-20), o que implica na troca do sinal do determinante.

(III) ***u****× (****v*** *+* ***w****) =* ***u****×****v*** *+* ***u****×****w***

(IV) *m****u****×* ***v*** *= m(****u****×****v****)*, onde *m* é um escalar.

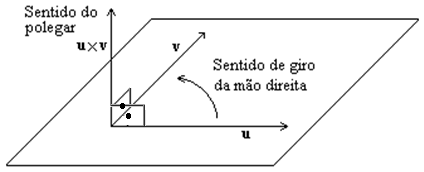
(V) ***u****×* ***v*** *=* ***o*** se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se ***u***e***v*** são colineares ou paralelos.

(VI) ***u****×* ***v*** é simultaneamente ortogonal a ***u*** *e* ***v***, isto é, ***u****×* ***v*** é ortogonal ao plano formado por

***u***e***v***

(VII) O sentido de ***u****×****v*** é dado pela regra da mão direita ou do parafuso de rosca direita conforme sugere a figura 1-15. Consequentemente tem-se, para os vetores canônicos:

***ax*** *×* ***ay*** *=* ***az****,* ***ay*** *×* ***az*** *=* ***ax****,* ***az*** *×* ***ax*** *=* ***ay***



**Fig. 1-15: direção e sentido do produto vetorial**

(VIII) *||****u****×****v****||2 = ||****u****||2 ||****v****||2 – (****u ·******v****)2* (1-21)

Esta equação é conhecida como *identidade de Lagrange.*

(IX) *||****u****×****v****|| = ||****u****|| ||****v****||senθ*, onde *θ* é o ângulo entre ***u*** e ***v*** (1-23)

Para demonstrar esta propriedade, utiliza-se a identidade de Lagrange e a equação (1-10).

(X) O produto vetorial não é associativo, ou seja, em geral:

***u****×(****v****×* ***w****) ≠ (****u****×****v****)×* ***w***

Exemplo 13: Determinar um vetor unitário ortogonal aos vetores ***u*** *= (2, –6, 3)* e***v*** *= (4, 3, 1)*.

Solução: Pela propriedade (VI), o vetor ortogonal, ***w*** é dado por:

***w*** *=* ***u****×****v*** ou *–* ***w*** *=* ***v****×* ***u***

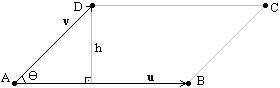
Então, usando a equação (1-20) encontra-se:

***w*** *= –15****ax*** *+ 10****ay*** *+30****az*** ou *–****w*** *= 15****ax*** *– 10****ay*** *– 30****az***

Logo, o vetor unitário na direção de ***w***, com *||****w****|| = 35*, será:

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO VETORIAL**

Geometricamente, a norma do produto vetorial entre ***u*** e ***v*** é igual à área do paralelogramo formado por esses dois vetores. Para a demonstração considere-se a figura 1-16.



**Fig. 1-16: Paralelogramo formado por *u* e *v***

A demonstração é muito fácil. Sabe-se que a área de um paralelogramo é dada pelo produto entre base e altura. Então se tem, da figura 1-16:

*Base = ||****u****||, Altura = h = ||****v****||senθ*, então:

*Área = Base×Altura = ||****u****|| ||****v****||senθ*

Mas, pela propriedade (IX), *||****u****|| ||****v****||senθ = ||****u****×****v****||*. Logo:

*Área = ||****u****×****v****||* (1-24)

Exemplo 15: Calcular a área do triângulo cujos vértices são: *A(1, –2, 1), B(2, –1, 4)* e *C(–1, –3, 3)*

Solução: Raciocinando sobre a figura 1-16 vê-se que a área do triângulo *ABC* é metade da área do paralelogramo *ABCD*. Portanto tem-se:

*Área = ½ ||****AB****×****AC****||*

Onde ***AB*** *=* ***B*** *–* ***A*** *=* (*1, 1, 3*)*,* ***AC*** *=* ***C*** *–* ***A*** *=* (*–2, –1, 2*)e***AB****×****AC*** *=* (*5, –8, 1*). Logo:

=

Exercício: Mostrar que o quadrilátero de vértices consecutivos *A*(*1, –2, 3*)*, B*(*4, 3, –1*)*, C*(*5, 7, –3*)e

*D*(*2, 2, 1*) é um paralelogramo e calcular sua área.

**Resposta***: Área = 9,43 ua*

**PRODUTO MISTO**

Dados os vetores ***u*** *= x1****ax*** *+ y1****ay*** *+ z1****az****,* ***v*** *= x2****ax*** *+ y2****ay*** *+ z2****az***e***w*** *= x3****ax*** *+ y3****ay*** *+ z3****az***, tomados nessa ordem, chama-se de produto misto, denotado por *(****u,v,w****)*, ao número real:

(***u,v,w***) *=* ***u .***(***v****×****w***) (1-25)

Pode-se verificar facilmente que:

(1-26)

Exemplo 16: Calcular o produto misto dos vetores: ***u*** *=* (*4, –3, 2*)*,* ***v*** *=* (*–1, 3, 3*)e***w*** *=* (*2, 3, 5*), nesta ordem.

Solução: Substituindo-se os vetores ***u***, ***v*** e ***w*** na equação (1-26) e calculando o determinante formado, encontra-se:

(***u,v,w***) *=*

**PROPRIEDADES DO PRODUTO MISTO**

(I) (***u,v,w***) *= 0* se um dos vetores for nulo, ou se dois deles forem colineares, ou se os três forem coplanares.

(II) O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é:

(***u,v,w***) *=* (***v,w,u***) *=* (***w,u,v***)

Entretanto, o produto misto muda de sinal se forem trocadas as posições de apenas dois vetores consecutivos.

(III) Se os operadores produto (**.** e ×) permutarem, mantendo-se a ordem dos vetores, o produto misto não muda, isto é:

***u ·*** *(****v****×****w****) = (****u****×****v****)* ***·******w***

(III) *(****u,v****,m****w****) = (****u****,m****v****,****w****) = (m****u****,****v,w****) = m(****u,v,w****)*

OBSERVAÇÃO: O produto vetorial e o produto misto são definidos apenas no *R3*.

Exemplo 18: Verificar se os pontos *A*(*1, 2, 4*)*, B*(*–1, 0, –2*)*, C*(*0, 2, 2*)e *D*(*–2, 1, –3*) estão no mesmo plano.

Solução: os quatros pontos estarão no mesmo plano, se forem coplanares os vetores: ***AB****,* ***AC***e***AD***. Então se têm:

***AB*** *=* (*–2, –2, –6*)*,* ***AC*** *=* (*–1, 0, –2*)*,* ***AD*** *=* (*–3, –1, –7*)

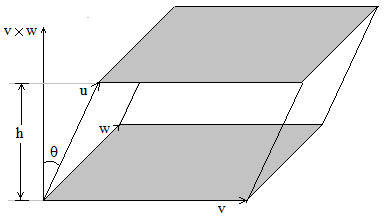
Utilizando a equação (1-26) para encontrar o produto misto, chega-se no resultado:

(***AB****,* ***AC****,* ***AD***) *= 0*

Logo, os quatros pontos estão no mesmo plano.

**INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO MISTO**

Geometricamente, o produto misto ***u .****(****v****×****w****)* tem módulo igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas por ***u****,* ***v***e***w***. Para demonstração, considere-se o paralelepípedo da figura 1-17.



**Fig. 1-17: Interpretação do produto misto**

*Volume de um paralelepípedo = Área da base × Altura*

*Área da base = Ab = ||****v****×****w****||, Altura = h = ||****u****||cosθ*. Então:

*Volume = Ab×h = ||****v****×****w****|| ||****u****||,* ou seja:

*Volume = |****u .*** *(****v****×****w****)|* (1-27)

Exemplo 19: Dados os vetores ***u*** *= (x, 5, 0),* ***v*** *= (3, –2, 1)* e***w*** *= (1, 1, –1)*, calcular o valor de *x* para que o volume do paralelepípedo determinado por ***u****,* ***v*** *e* ***w*** seja igual a *24*.

Solução: fazendo o produto misto dos três vetores através da equação (1-26), escreve-se a equação:

(***u,v,w***) *=*

*Volume = |x + 20| = 24*

*x + 20 = 24* ou *–x – 20 = 24*

Donde se tira:

*x = 4* ou *x = –44*

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



VETORES COMO UMA LISTA ORDENADA: ***u*** *=* (*u1, u2, ..., un*)*,* ***v*** *=* (*v1, v2, ..., vn*)

VETORES PARALELOS:

NORMA: , PRODUTO ESCALAR: ***u .v*** *= u1v1 + u2v2 + ... + unvn*

CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE: ***u .v*** *= 0*

ALGUMAS PROPRIEDADES INTERESSANTE:

*||****u*** *–* ***v****||2 = ||****u****||2 – 2****u · v*** *+ ||****v****||2,* ||***u*** *+* ***v***||2 = ||***u***||2 + *2****u******· v* +** ||***v***||2, (***u*** *+* ***v***) ***·*** (***u*** *–* ***v***) = ||***u***||2 – ||***v***||2

MENOR ÂNGULO ENTRE ***u*** E ***v***: , PROJEÇÃO DE ***u*** SOBRE ***v***: ***w*** *= k****v*** *=*

PRODUTO VETORIAL:

PRODUTO MISTO: (***u,v,w***) *=* ***u .***(***v****×****w***) =

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO FORMADO POR ***u*** E ***v***: *Área = ||****u****×****v****||*

VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO FORMADO POR ***u***, ***v*** E ***w***: Volume

CONDIÇÃO DE COPLANARIDADE DE TRÊS VETORES: (***u, v, w***) = 0

**PROBLEMÁTICA**

1) Determinar o vetor ***w*** na igualdade *3****w +*** *2****u =*** *(1/2)****v + w***, sendo dados: ***u*** *= (3, –1)* e***v*** *= (–2, 4)*.

2) Encontrar os escalares *c1* e *c2* tais que: ***w*** *= c1****u*** *+ c2****v***, sendo ***u*** *= (1, 2),* ***v*** *= (4, –2)* e***w*** *= (–1, 8)*. O conjunto formado pelos vetores ***u*** e ***v*** é *LI* ou *LD*? E o conjunto formado pelos vetores ***u, v*** e ***w*** é *LI* ou *LD*?

3) Dado os pontos *P(1, 2, 4), Q(2, 3, 2)* e *R(2, 1, –1)*, determinar as coordenadas de um ponto *S* tal que os pontos consecutivos *P, Q, R* e *S* sejam vértices de um paralelogramo.

4) Determine os valores de *m* e *n* para que sejam paralelos os vetores:

***u*** *= (m+1, 3, 1)* e***v*** *= (4, 2, 2n – 1)*

5) Usando a desigualdade triangular e usando paralelismo de vetores, verificar se são colineares os pontos:

1. *A(–1, –5, 0), B(2, 1, 3)* e *C(–2, –7, –1)*
2. *A(2, 1, –1), B(3, –1, 0)* e *C(1, 0, 4)*

6) Dado os vetores ***u*** *= 4****ax*** *– 2****ay*** *–* ***az****,* ***v*** *= 3****ax*** *–* ***ay*** *+ 2****az*** e **w** = *5****ay*** *– 3****az****,* encontre:

a) ***u******.******v*** b) ***v******.*** *(****u*** *–* ***w****)* c) os ângulos entre ***u*** e ***v***

7) Sabendo que a distância entre os pontos *A(–1, 2, 3)* e *B(1, –1, m)* é *7*, calcular *m*.

8) Verificar se são ortogonais os vetores ***u*** *= (1, 1, 4)* e***v*** *= (–1, 2, 2)*.

9) Provar que o triângulo de vértices *A(2, 3, 1), B(2, 1, –1)* e *C(2, 2, –2)* é um triângulo retângulo em *B*. Calcule os ângulos internos dos outros dois vértices.

10) Determinar um vetor ortogonal aos vetores ***v1*** *= (1, –1, 0)* e***v2*** *= (1, 0, 1)*.

11) Encontre o versor de cada um dos vetores abaixo e em seguida calcule a norma de cada versor obtido.

a) ***u*** *= (3, –4)*, b) ***v*** *= (0, 2, 0)*

12) Dados ***u*** *= 3****ax*** *– 4****ay*** *+ 2****az****,* ***v*** *= 2****ax*** *+ 5****ay*** *– 3****az***e***w*** *= 4****ax*** *+ 7****ay*** *+ 2****az***, onde ***ax****,* ***ay*** e ***az*** são os vetores da base canônica, calcule:

a) *2****u*** *– 3****v***, b) *3****u*** *+ 4****v*** *– 2****w***, c) ***u·v***, d) *||****u****||, ||****v****||* e *||****w****||*.

13) Dado os vetores ***u*** *= (2, –2, 3),* ***v*** *= (1, –3, 4)* e***w*** *= (3, 6, –4)*, encontre o valor de cada uma das expressões abaixo:

a) *||****u*** *+* ***v****||* b) *||****u****|| + ||****v****||* c) *||****u*** *–* ***v****||* d) *||****u****|| – ||****v****||* e) *||3****u*** *– 5****v*** *+* ***w****||*

14) Seja o vetor ***v*** *= (–2, 3, 0, 6)*. Encontre todos os escalares *k* tais que: *||k****v****|| = 5*

15) Encontre o volume do paralelepípedo formado pelos vetores:

***u*** *= (2, –2, 3),* ***v*** *= (1, –3, 4)* e***w*** *= (3, 6, –4)*

16) Encontre a área do paralelogramo formado pelos vetores: ***u*** *= (2, –2, 3)* e***v*** *= (1, –3, 4).*

17) Um vetor ***a*** do plano *xy* tem comprimento de *9* unidades e aponta na direção e sentido que está a *120º* anti-horário a partir do eixo *x* positivo e um vetor ***b*** naquele plano tem um comprimento de *5* unidades e aponta na direção *y* positiva. Encontre ***a · b***

18) Resolva a equação *5****x*** *– 2****v*** *= 2(****w*** *– 5****x****)* em ***x***, sabendo que ***v*** *= (1, 2, –4, 0)* e***w*** *= (–3, 5, 1, 1)*.

19) Para quais valores de *k*, se houver, os vetores ***u*** e ***v*** são ortogonais?

a) ***u*** *= (2, k, k)* e***v*** *= (1, 7, k)* b) ***u*** *= (k, k, 1) e* ***v*** *=( k, 5, 6)*

20) Os campos magnéticos atuando num dado ponto do espaço são dados por:

***H1*** *= –2****ax*** *+ 3****ay*** *+****az****,* ***H2*** *= 5****ax*** *– 4****ay*** *+* ***az****,* ***H3*** *= –2****H1***.

Encontre o campo magnético resultante, bem como a sua intensidade.

21) Determinar o vetor projeção de ***u*** *= (2, 3, 4)* sobre o vetor ***v*** *= (1, –1, 0)*.

22) Sejam os vetores ***u*** *= (3, 1, –1)* e***v*** *= (a, 0, 2)*. Calcular o valor de *a* para que a área do paralelogramo determinado por ***u*** e ***v*** seja igual a *2√6*.

23) Determinar o valor de *k* para que os seguintes vetores sejam coplanares.

1. ***u*** *= (2, –1, k),* ***v*** *= (1, 0, 2)* e***w*** *= (k, 3, k)*
2. ***u*** *= (2, 1, 0),* ***v*** *= (1, 1, –3)* e***w*** *= (k, 1, –k)*.

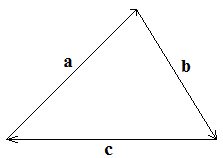
24) Dado os pontos *A(1, –2, 3), B(2, –1, –4), C(0, 2, 0) e D(–1, m, 1)*, determinar o valor de *m* para que seja de *20* o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores ***AB****,* ***AC***e***AD***.

25) A direção de propagação de uma onda eletromagnética é muitas vezes perpendicular aos campos elétrico e magnético que compõem essa onda. Se os campos elétrico e magnético de certa onda são dados, respectivamente, pelos vetores: ***E*** *= 2****ax*** *–****ay*** *+* ***az***e***H*** *= –****ax*** *+ 3****ay*** *+ 2****az***, encontre um vetor que dá a direção de propagação dessa onda.

26) Verifique se os CPF dados abaixo são CPF válidos.

a) *044 474 842 – 37* b) *159 842 375 – 20* c) 992 205 552 – 04

27) Encontre ***a*** *+* ***b*** *+* ***c*** considerando os vetores da figura P1-2.



**Fig. P1-2**

28) Considere o triângulo da figura P1-2 e mostre que ***a****×****b*** *=* ***b****×****c*** *=* ***c****×****a***

29) Considerando o resultado do problema 28, deduza a lei dos senos para a trigonometria plana.

30) Prove que, se ||***u + v***||2 = ||***u***||2 + ||***v***||2, então ***u*** e ***v*** são ortogonais.

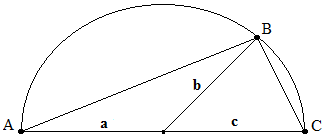
31) Encontre todos os vetores unitários paralelos ao plano *xy* que são ortogonais ao vetor ***u*** = *(3, –1, 2)*

32) Simplifique a expressão (***u*** *+* ***v***)×(***u*** *–* ***v***).

33) Prove que, se ***u*** e ***v*** são vetores não ortogonais e não nulos, e se *θ* é o ângulo entre eles, então:



34) Considere o triângulo *ABC* inscrito numa semicircunferência, de tal modo que um lado coincide com o diâmetro, conforme mostra a figura P1-3. Utilizando produto escalar entre vetores mostre que o ângulo do vértice *B* é sempre reto.



**Fig. P1-3**.

35) Um vetor ***v*** do *R3* tem como ângulos diretores *60º* e *120º*, nas direções positivas dos eixos *x* e *y* respectivamente. Determinar o vetor ***v***, sabendo que *||****v****|| = 2*.

**Resposta***:* ***v*** *= (1, –1, ±√2)*

36) Os ângulos diretores de um vetor com as direções *x* e *y* positivas são *45º* e *60º*, respectivamente. Calcule o ângulo desse vetor com a direção *z* positiva.

**Resposta**: *60º ou 120º .*

37) Determinar o vetor ***v*** ortogonal ao vetor ***u*** *= (2,* *–3, –12)* e colinear ao vetor ***w*** *= (–6, 4, –2).*

38) Mostrar que se ***u*** e ***v*** são vetores, tal que ***u*** *+* ***v*** é ortogonal a ***u*** *–* ***v***, então *||****u****|| = ||****v****||.*

39) Dados os pontos *A(3, 2, 1), B(4, 1, –1) e C(1, 0, 1)*, pede-se:

(a) Mostrar que o triângulo *ABC* é retângulo em *A*.

(b) Calcular a medida da projeção do cateto *AB* sobre a hipotenusa *BC*.

(c) Determinar o pé da altura do triângulo relativa ao

vértice *A*.

40) Encontre o menor ângulo entre duas diagonais distintas de um cubo de aresta *a*.

**Resposta:** *70,53º .*