CAPÍTULO 6

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

6.1 FUNÇÕES VETORIAIS

Neste capítulo será estudado um tipo especial de função onde o domínio, o contradomínio e a imagem, são espaços vetoriais reais, ou seja, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, daí essas funções serem chamadas de *funções vetoriais* ou *transformações vetoriais* como é mais comum.

Para indicar que *T* é uma transformação do espaço vetorial *V* no espaço vetorial *W*, escreve-se:

*T: V → W*

Sendo *T* uma função, cada vetor ***v****∈V* tem um só vetor imagem ***w****∈W*, que será indicado por ***w*** *= T(****v****)*

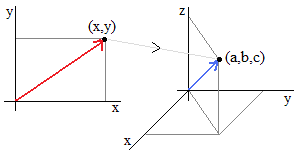
Exemplo 1: Uma transformação *T: R2 → R3* associa vetores ***v*** *= (x, y)∈ R2* com vetores ***w*** *= (a, b, c) ∈ R3* (Figura 6-1). Se a lei que define *T* é tal que:

*a = 3x, b = –2y* e *c = x – y*

Então a imagem de cada vetor *(x, y)* será representada por:

*T(****v****) =* ***w*** ou *T(x, y) = (3x, –2y, x – y)*

Se, por exemplo, ***v*** *= (2, 1)*, então ***w*** *= T(2, 1) = (3(2), –2(1), 2 – 1) = (6, –2, 1)*



**Fig. 6-1: Transformação de um vetor.**

Exemplo 2: Considere a matriz e seja *T* a transformação que leva um *vetor coluna* ***x*** de

dimensões *2×1* em *R2* no vetor-coluna *A****x*** em *R3*. Então, tem-se:

*T(****x****) = A****x***

Ou seja, *T(x1, x2) =*  

Pode-se expressar a transformação *T* em forma de ênupla por:

*T(x1, x2) = (x1 – x2, 2x1 + 5x2, 3x1 + 4x2)*

Por exemplo,  ou *T(–1, 3) = (–4, 13, 9)*

Em suma, se *T* é uma transformação cujo domínio é *Rn*, contradomínio *Rm* e cuja imagem é um subconjunto de *Rm*, escreve-se:

*T: Rn → Rm*

Assim, no exemplo 3 tem-se:

*T: R2 → R3*

Exercício: Sendo ***x*** um vetor coluna, encontre o domínio e o contradomínio da transformação:

*T(****x****) = A****x*** quando: (a) *A* tem dimensões *3×2*; (b) *A* tem dimensões *2×3*; (c) *A* tem dimensões *3×3*. Em cada caso indique as dimensões do vetor ***x***.

**TRANSFORMAÇÕES MATRICIAIS**

O exemplo 2 é um caso especial de *transformação matricial*. Mais especificamente, se *A* é uma matriz *m×n* e se ***x*** é *um vetor coluna* em *Rn*, então o produto *A****x*** é um vetor coluna em *Rm*. Então, escreve-se:

*T: Rn → Rm* com *T(****x****) = A****x***

No caso especial em que *A* é uma matriz quadrada, *n×n*, diz-se que *T* é um *operador matricial* de *Rn*.



Exemplo 3: Se *O* é a matriz nula *m×n*, então:

*T(****x****) = O****x*** *=* ***o***

Essa transformação é denominada de *transformação nula*.

Exemplo 4: Se *I* é a matriz identidade *n×n*, então para cada vetor coluna ***x*** em *Rn,* tem-se:

*T(****x****) = I****x*** *=* ***x***

e diz-se que *T* é o *operador identidade*.

Exemplo 5: O problema de se resolver um sistema linear *A****x*** *=* ***b*** pode ser visto como o de encontrar um vetor ***x*** em *Rn* cuja imagem pela transformação *T* é o vetor ***b*** de *Rm*. Então, seja *T: R2 → R3* a transformação do exemplo 2. Encontre se houver um vetor ***x*** em *R2* cuja imagem por *T* é:

1. (b)

Solução (a): . Assim, a forma escalonada reduzida por linha da matriz aumentada é:

. Portanto, tem-se a solução única 

Solução (b): . Neste caso, pode ser mostrado que esse sistema é inconsistente.

Assim, o vetor ***b*** não está na imagem de *T*.

6.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Do ponto de vista *operacional*, ou seja, pela maneira que um sistema, função ou uma transformação responde às entradas, diz-se que essa operação é linear se as seguintes propriedades forem obedecidas simultaneamente:

(1) *Homogeneidade*: Modificando-se a entrada ***v*** (variável independente) por um escalar multiplicativo *λ*, modifica-se a saída *T(****v****)* (variável dependente) pelo mesmo escalar.

(2) *Aditividade*: A soma de duas entradas provoca a soma das saídas correspondentes às duas entradas individuais.

Por estas propriedades introduz-se a seguinte definição para o caso de transformações:

Uma função *T: Rn → Rm* é dita uma *transformação linear* de *Rn* em *Rm* se as duas propriedades seguintes valem para quaisquer vetores ***u*** e ***v*** e qualquer escalar *λ:*

(1) *T(λ****u****) = λT(****u****)* [Homogeneidade] (6-1)

(2) *T(****u*** *+* ***v****) = T(****u****) + T(****v****)* [Aditividade] (6-2)

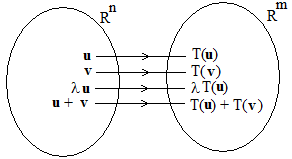
Veja-se ilustração na figura 6-2.

No caso especial em que *m = n*, a transformação linear é denominada um *operador linear* de *Rn*.

As duas propriedades dessa definição podem ser combinadas para resultar na única definição:

*T(λ1****u1*** *+ λ2u****2*** *+ ... + λk****uk****) = λ1T(****u1****) + λ2T(****u2****) + ... + λkT(****uk****)* (6-3)

que os engenheiros e físicos chamam de *princípio da superposição*.



**Fig. 6-2: Transformação linear**

Teorema: Se *A* é uma matriz *m×n* e ***x*** é um vetor-coluna em *Rn*, então a transformação matricial

*T*: *Rn → Rm*, onde *T(****x****) = A****x***, é linear, pois:

*T(λ****u****) = A(λ****u****) = λ(A****u****) = λT(****u****)*

*T(****u*** *+* ***v****) = A(****u*** *+* ***v****) = A****u*** *+ A****v*** *= T(****u****) + T(****v****)*

OBSERVAÇÃO: A recíproca do teorema acima é verdadeira, ou seja, todas as transformações lineares do *Rn* para o *Rm* são transformações matriciais.

Exercício:

Seja a transformação *T: R2 → R3* definida por *T(x, y) = (2x, 0, x + y)*, mostre que ela é linear.

Teorema: Se *T: Rn → Rm* é uma *transformação linear*, então:

*T(****o****) =* ***o***

*T(–****u****) = –T(****u****)*

*T(****u*** *–* ***v****) = T(****u****) – T(****v****)*

OBSERVAÇÃO: A recíproca deste teorema não é verdadeira.

Exemplo 6: A soma de um vetor ***xo*** com um vetor ***x*** tem o efeito de transladar o ponto final de ***x*** por ***xo***. Assim, o operador *T(****x****) =* ***xo*** *+* ***x*** de *Rn* tem o efeito de transladar cada ponto de *Rn* por ***xo***. Logo *T* não é linear se ***xo*** *≠* ***o***. Para mostrar, basta se verificar que:

*T(****o****) =* ***xo*** *+* ***o*** *=* ***xo*** *≠* ***o***

violando a parte (a) do teorema.

Exercício: Mostre que as seguintes transformações *não* são lineares.

a) *T(x, y) = (xy, x)* b) *T(x, y) = (x + 3, 2y, x + y)*

**MATRIZ CANÔNICA DE UMA TRANSFORMAÇÃO**

Teorema: Seja *T: Rn → Rm* uma transformação linear em que *T(****x****) = A****x***, onde ***x*** é qualquer vetor coluna de *Rn*, então as colunas da matriz *A* representam as transformações dos vetores unitários canônicos: ***e1****,* ***e2****, ...,* ***en***, que são os vetores canônicos do *Rn*. Assim, a matriz *A* pode ser escrita como:

*A =* [*T*(***e1***) *T(****e2***) *... T*(***en***)] (6-4)

Por este motivo a matriz *A* é denominada e *matriz canônica*.

Exemplo 7: Encontre a matriz canônica do operador *T: R2 → →R3* definido por:

*T(****x****) =* (*x – 2y, –3x, x + 3y*)

Solução: Pelo teorema anterior, a matriz canônica de *T* é:

*A =* [*T*(***e1***) *T*(***e2****)*] *=* [*T*(*1, 0*) *T*(*0, 1*)] *=* [(*1, –3, 1*)(*–2, 0, 3*)]

Logo, a matriz canônica é:

*A* = 

Para conferir, verifique que:

ou *T(****x****) =* (*x – 2y, –3x, x + 3y*)

Exercício: Um operador linear *T: R2 → R2* é definido de tal forma que: *T*(*1, 0*) *=* (*2,* –*3*) e *T*(*0, 1*) *=* (–*4, 1*). Determinar *T*(*x, y*) em forma de ênupla.

**Resposta**: *T(x, y) = (2x – 4y, –3x + y)*

Muitas vezes especificam-se as transformações de *Rn* em *Rm* por fórmulas que relacionam os componentes de um vetor ***x*** *= (x1, x2, ..., xn)* em *Rn* com os componentes de sua imagem ***w*** *= T(****x****) = (w1, w2, ..., wm)*. Então, tal transformação é linear se, e somente se, a relação entre ***w*** e ***x*** pode ser expressa por ***w*** *= A****x***, onde *A = [aij]* é a matriz canônica de *T*. Em outras palavras, as equações do sistema *A****x = w*** são todas lineares. Por exemplo, o sistema linear:

*2x1 – 3x2 + x3 = 1*

*x1 + 4x2 – 2x3 = 5*

representa uma transformação do *R3* para o *R2*, onde ***x*** *= (x1, x2, x3)* e ***w*** *= (1, 5)*, com matriz canônica:

*A =*

Exercício: Encontre a imagem da reta *x + y = 1,* pela transformação linear *T(x, y) = (r, s)* definido pelas equações

*2x + y = r*

*6x + 2y = s*

**Resposta**: *x = –r + s/2, y = 3r – s. Substituindo na equação da reta temos:*

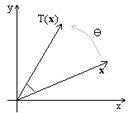
*2r – s/2 = 1. Esta imagem também representa uma reta.*

6.3 ALGUNS OPERADORES LINEARES IMPORTANTES

Os principais operadores lineares de *R2* e *R3* são as *rotaçõe*s, as *reflexões* e as *projeções*. Mostrar-se-á nesta seção como se obter as matrizes canônicas desses operadores. Seja começar estas operações apenas no *R2*.

**ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM**

Considerando-se a figura 6-4, seja o operador linear *T* que gira cada vetor ***x*** de *R2* em torno da origem por um ângulo *θ*. Para que esta transformação seja linear, é necessário que a rotação seja em torno da origem.



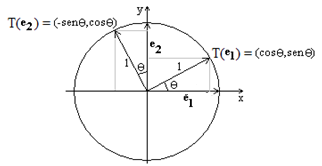
**Fig. 6-4: Rotação em torno da origem.**

Para se encontrar a matriz canônica, denotada por *R*, seja ater-se a figura 6-5. Por essa figura, tira-se:

*R = [T(****e1****) T(****e2****)]* =  (6-6)

de modo que a imagem de um vetor coluna ***x*** *= (x, y)* por essa rotação é:

*T(x, y) = R****x*** *=*  (6-7)



**Fig. 6-5: Componentes de *e1* e *e2* pela rotação na origem.**

Exemplo 8: Encontre a imagem do vetor coluna ***x*** *= (1, 1)* pela rotação de *π/6 rd* em torno da origem.

Solução: Da equação (6-7) com *θ = π/6*, tira-se:

*R****x*** *=* 

Ou em forma de ênupla a imagem é *T(1, 1)* = *(0,37; 1,37)*

OBSERVAÇÃO: A matriz de rotação tem seu determinante igual a *1.* A recíproca não é verdadeira

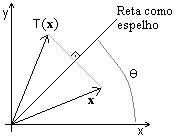
**REFLEXÕES EM RETAS PELA ORIGEM**

Seja o operador *T: R2 → R2* que reflete cada vetor ***x***numa reta pela origem que faz um ângulo *θ* com o eixo positivo ***x***. (Figura 6-6). Chamando de *H* a matriz canônica da reflexão, da figura 6-6, pode ser mostrado que:

*H = [T(****e1****) T(****e2****)] =*  (6-8)

De modo que a imagem do vetor ***x*** *= (x, y)* por essa reflexão é:

*T(****x****) = H****x*** (6-9)



**Fig. 6-6: Reflexão de um vetor.**

As reflexões mais básicas são no eixo *x (θ = 0o)*, no eixo *y (θ = 90º)* e na reta *y = x (θ = 45º)*. A tabela 6-1 mostra um resumo dessas três reflexões.

**TABELA 6-1**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| OPERADOR | IMAGENS DE ***e1*** e ***e2*** | MATRIZ CANÔNICA |
| Reflexão no eixo *y*  *T(x,y) = (–x, y)* | *T(****e1****) = T(1, 0) = (–1, 0)*  *T(****e2****) = T(0, 1) = (0, 1)* |  |
| Reflexão no eixo *x*  *T(x,y) = (x, –y)* | *T(****e1****) = T(1, 0) = (1, 0)*  *T(****e2****) = T(0, 1) = (0, –1)* |  |
| Reflexão na reta *y = x*  *T(x,y) = (y, x)* | *T(****e1****) = T(1, 0) = (0, 1)*  *T(****e2****) = T(0, 1) = (1, 0)* |  |

Exemplo 9: Encontre a imagem do vetor ***x*** *= (1, 1)* pela reflexão na reta pela origem que faz um ângulo de *30º* com o eixo positivo *x*.

Solução: Substituindo-se *θ = 30º* em (6-9), tem-se:

*H****x*** *=* 

Exercícios

1) Encontre a matriz canônica para a reflexão no *R2* pela reta *y =* –*x*

2) Encontre a matriz canônica para a reflexão por um ponto na origem.

**Resposta***:*

3) Encontre a matriz canônica da reflexão pela reta *y = mx*, em termos de *m*

**Resposta:**



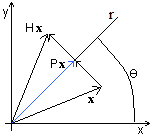
4) Encontre a imagem do vetor ***x*** *= (3, 4)* pela reflexão na reta *y = 2x*

**Resposta**: *(1,4; 4,8)*

OBSERVAÇÃO: A matriz de reflexão tem seu determinante igual a *–1*. A recíproca não é verdadeira.

**PROJEÇÕES ORTOGONAIS SOBRE RETAS PELA ORIGEM**

Seja *T: R2 → R2* que projeta cada vetor ***x*** de *R2* sobre uma reta pela origem ao longo de uma perpendicular à reta, como mostra a figura 6-7. Pode-se mostrar que essas projeções são lineares e, portanto, são operadores matriciais.



**Fig. 6-7: Projeção de um vetor sobre uma reta.**

Pela figura 6-7 pode ser mostrado que:

*P****x*** *–* ***x*** *= ½(H****x*** *–* ***x****)*

E, portanto, após algumas manipulações algébricas encontra-se:



De modo que a imagem do vetor ***x*** *= (x, y)* por essa projeção é:

*T(****x****) = P****x*** (6-11)

Exemplo 10: Encontre a projeção ortogonal do vetor ***x*** *= (1, 1)* sobre a reta pela origem que faz um ângulo de *π/12 rd* com o eixo *x*.

Solução: Substituindo *θ = 15º* em (6-11), tem-se:



Exercícios

1) Encontre as matrizes canônicas das projeções ortogonais no *R2* sobre os eixos coordenados *x* e *y*.

2) Encontre a matriz canônica da projeção sobre a reta *y = x*.

OBSERVAÇÃO: A matriz de projeção ortogonal tem seu determinante igual a *zero*.

**TRANSFORMAÇÕES COMPOSTAS**

Às vezes se precisa fazer várias transformações em seqüência sobre um dado vetor coluna ***x***. Por exemplo: um vetor ***x*** deve ser girado de um ângulo *θ1* e o resultado dessa transformação deve ser refletido sobre uma reta na origem que forma um ângulo *θ2* com o eixo *x.* Então estas transformações podem ser realizadas, assim:

Resultado da rotação: *T(****x****) = R1****x***, onde *R1* é a matriz de rotação pelo ângulo *θ1*.

Resultado da reflexão: *T(R1****x****) = H2(R1****x****) = (H2R1)****x***, onde *H2* é a matriz de reflexão por *θ2*.

O último resultado mostra que se poderia ter realizado as duas transformações sequenciais simplesmente multiplicando-se o vetor ***x*** pela matriz canônica composta:

*A = H2R1*

onde a matriz composta é o produto das matrizes de cada transformação na *seqüência inversa*.

Exercícios

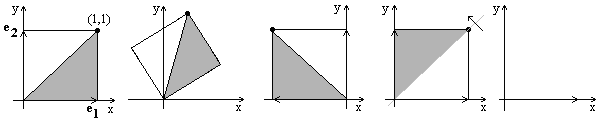
1) Seja *T: R2 → R2* a transformação que projeta um vetor ***x*** ortogonalmente sobre o eixo *x* e em seguida reflete o vetor obtido no eixo *y*. Encontre a matriz canônica da transformação composta. Encontre o resultado destas transformações sobre o vetor *(2, 1).*

2) Considere uma reflexão pela reta na origem que forma um ângulo de *π/4 rd* com o eixo *x* positivo seguida de outra reflexão pela reta na origem que faz um ângulo de *π/8 rd*. Encontre a matriz canônica de uma rotação que tem o mesmo efeito dessas duas reflexões e encontre o ângulo de rotação equivalente.

**Resposta**: *θ = –π/4*

**TRANSFORMAÇÕES DO QUADRADO UNITÁRIO**

O *quadrado unitário* em *R2* é o quadrado de vértices *(0, 0), (1, 0), (1, 1)* e *(0, 1)*. Muitas vezes é possível entender melhor algumas transformações esboçando as imagens desses vértices. Figura 6-8.



O quadrado unitário Girado na origem Refletido no eixo *y* Refletido na reta *y = x* Projetado sobre o eixo *x*

**Fig. 6-8: Algumas transformações do quadrado unitário**

Exercício: Encontre os vértices do quadrado unitário pela rotação na origem de um ângulo de *60º*. Esboce a imagem dessa transformação.

6-4 OPERADORES LINEARES DO R2 QUE PRESERVAM A NORMA

As rotações em torno da origem e as reflexões em retas pela origem não modificam o comprimento de vetores nem o ângulo entre eles.

Em geral, um operador linear *T: Rn → Rn* com a propriedade *||T(****x****)|| = ||****x****||* é denominado um *operador ortogonal* ou uma *isometria linear*, ou seja, uma transformação que preserva medidas. E como:

*T(****x****) = A****x***, então *||A****x****|| = ||****x****||*.

O seguinte teorema é relacionado com operadores ortogonais:

Teorema: Se *T: Rn → Rn* é um operador linear de *Rn*, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *||A****x****|| = ||****x****||* para qualquer ***x*** em *Rn*

(b) *A****x.****A****y*** *=* ***x.y*** para qualquer ***x*** e ***y*** em *Rn*

(c) *A* é ortogonal, ou seja, *ATA = I*

(d) *det(A) = 1 (rotação) ou det(A) = –1 (reflexão)*

(e) O ângulo entre os vetores ***x*** e ***y*** é preservado.

Exemplo 11: Descreva o operador linear que corresponde à matriz *A* dada a seguir.

(a)  (b) 

Solução (a): Os vetores-coluna ou vetores linha de *A* são ortogonais e unitários, portanto, *A* é ortogonal. E, como *det(A) = 1*, então o operador é uma rotação. Pode-se determinar o ângulo de rotação comparando *A* com a matriz de rotação em (6-6). Isso dá:

*cosθ =*  e *senθ =*  e pode-se concluir que *θ = 45º*

Solução (b): Verifica-se que *A* também é ortogonal e, como *det(A) =* –*1*, então o operador é uma reflexão. Comparando essa matriz com a matriz de reflexão em (6-8), tira-se:

*cos2θ =*  e *sen2θ =*  e pode-se concluir que *θ = 22,5º*

Exercício: Descreva o operador linear que corresponde a cada uma das matrizes abaixo e encontre os respectivos ângulos.



**Resposta:** *(a) –45º (Reflexão) b) 150º (Rotação)*

6.5 OPERADORES LINEARES DO R2 QUE NÃO PRESERVAM A NORMA

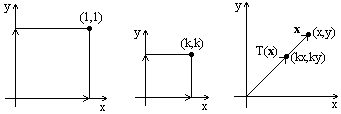
No *R2*, o operador linear *T(x, y) = (k1x, k2y)* provoca uma mudança de escala, quando *k1* e *k2* são positivo, tendo como matriz canônica a matriz diagonal:

*A* =

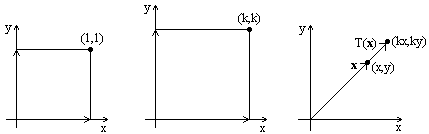
Onde *k1* e *k2* são os fatores de mudança de escala, sendo *k1* na direção *x* e *k2* na direção *y*. Se *0 < ki < 1* a mudança corresponde a uma compressão na escala. Se *ki > 1* a mudança corresponde a uma expansão na escala. Se *k1 = k2 = k* diz-se que há uma *homotetia* de razão *k* podendo ser uma *redução* (*0 < k < 1*) ou uma *ampliação* (*k > 1*)

OBSERVAÇÃO: A homotetia é realizada a partir de um ponto chamado de *centro de homotetia*. No caso da matriz acima, o centro de homotetia é a origem. A homotetia preserva a forma da figura. No caso em que *k < 0*, essa transformação é chamada de homotetia inversa.

A figura 6-9 ilustra uma redução sobre o quadrado unitário e sobre um vetor ***x***, e a figura 6-10 ilustra uma ampliação.



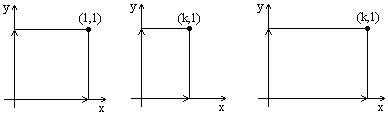
**Fig. 6-9: Homotetia de razão *0 < k < 1 (redução)***



**Fig. 6-10: Homotetia de razão *k > 1* *(ampliação)***

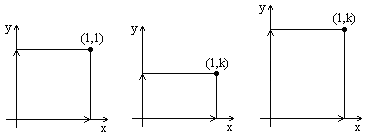
As figuras 6-11 e 6-12 ilustram compressões e expansões em apenas uma direção, *x* ou *y*, sobre o quadrado unitário, mantendo-se a outra dimensão inalterada, onde as matrizes correspondentes são:

*Ax* = *Ay* =



**(a) (b)**

**Fig. 6-11 (a) Compressão na direção *x*; (b) Expansão na direção *x***



**(a) (b)**

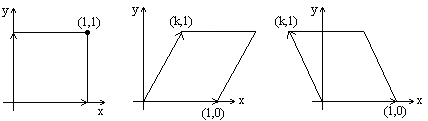
**Fig. 6-12. (a) Compressão na direção *y*; (b) Expansão na direção *y***

Exercício: dado o triângulo de vértices *(1, 1), (3, 1)* e *(1, 2)*, realizar uma homotetia inversa de razão *–2* nesse triângulo e esboce o resultado dessa transformação.

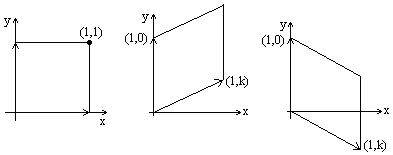
**CISALHAMENTO**

Um operador da forma *T(x ,y) = (x + ky, y)* translada um ponto *(x, y)* paralelamente ao eixo *x* por uma quantidade *ky*. Diz-se que esse operador é o *cisalhamento na direção x de razão k*. Se *k* for positivo, o cisalhamento é para a direita e se for negativo, o cisalhamento é para a esquerda. Analogamente, um operador linear da forma *T(x, y) = (x, y + kx)* é dito um *cisalhamento na direção y de razão k*. Se *k* for positivo, o cisalhamento é para cima e se for negativo, o cisalhamento é para baixo. A figura 6-13 fornece informação básica sobre os cisalhamentos de *R2*, sobre o quadrado unitário. As matrizes canônicas do cisalhamento nas direções *x* e *y* são respectivamente:





*Cisalhamento na direção x: k > 0 e k < 0*



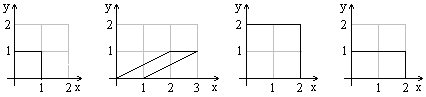
*Cisalhamento na direção y: k > 0 e k < 0*

**Fig. 6-13: Cisalhamento do quadrado unitário.**

Exemplo 12: Para cada uma das matrizes dadas a seguir, descreva o operador linear associado e mostre seu efeito sobre o quadrado unitário.



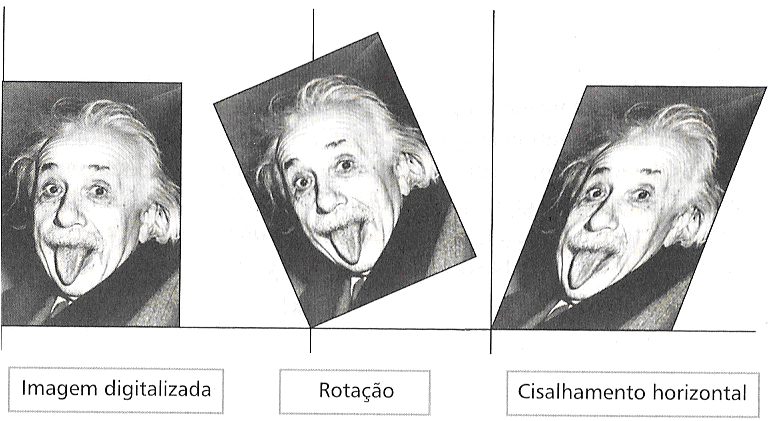
Solução: A matriz *A1* corresponde a um cisalhamento na direção *x* de razão *2*. A matriz *A2* corresponde a uma dilatação de razão *2* e *A3* corresponde a uma expansão na direção *x* de razão *2*. Os efeitos sobre o quadrado unitário são mostrados na figura 6-14.



(a) (b) (c) (d)

**Fig. 6-14: (a) Quadrado unitário; (b) cisalhamento; (c) dilatação; (d) expansão em *x***.

A figura a seguir mostra uma fotografia digitalizada de Einstein e duas transformações lineares computadorizadas.



Exercício: Determine a matriz canônica resultante de uma transformação composta de um cisalhamento horizontal de razão *2,* seguida de uma reflexão no eixo *y*. Esboce o efeito dessa transformação sobre o quadrado unitário.

6.6 DECOMPOSIÇÃO DE OPERADORES LINEARES DO R2

Uma matriz canônica pode representar uma ou mais transformações seqüenciais como será visto ao decompô-la em um produto de matrizes.

**OPERADORES COM MATRIZ DIAGONAL**

Uma matriz diagonal *D*, como já vista no capítulo 4, pode ser decomposta como:



Se *k1 > 0* e *k2 > 0*, então *D1* representa uma compressão ou expansão na direção *x* e *D2* representa uma compressão ou expansão na direção *y*. Assim, a matriz *D* é uma matriz composta de duas transformações seqüenciais.

Se *k1* ou *k2* for negativo, então a fatoração fica:



Neste caso, *D1* é uma compressão ou expansão na direção *x*, *D2* é uma reflexão no eixo *y* e *D3* é uma compressão ou expansão na direção *y.*

OBSERVAÇÃO: As matrizes diagonais com entradas não negativas alteram as dimensões da figura motivo pelo qual são chamadas de *matrizes de mudança de escala*.

Exercício: Decomponha o operador linear abaixo e responda que transformações estão sendo realizadas.



**Resposta**: *uma compressão de razão ½ na direção y e uma expansão de razão 3 na direção x*.

**OPERADORES COM UMA MATRIZ QUALQUER**

Qualquer operador linear 2×2 cuja matriz canônica tenha inversa pode ser decomposta como o produto de matrizes elementares, que pode ser realizada através da eliminação de Gauss-Jordan para obter as matrizes elementares *E1, E2, ... En* e fazendo:

*A = E1-1E2-1 ... En-1*

Exercício: Decomponha o operador linear abaixo em matrizes elementares e responda que transformações estão sendo realizadas, e em que seqüência.



**Resposta:** 

*Cisalhamento de razão 2 na direção x positiva, expansão de razão 2 na direção y, reflexão no eixo x e cisalhamento de razão 3 na direção y positiva.*

6.7 OPERADORES LINEARES DO R3

Como em *R2*, será preciso se distinguir entre operadores que preservam comprimentos (Operadores ortogonais) e os que não preservam. Os mais importantes que não preservam comprimentos são as projeções ortogonais, sendo as mais simples, as projeções sobre planos coordenados do sistema *xyz*. A tabela 6-2 fornece informação básica sobre esses operadores.

**OPERADORES QUE NÃO PRESERVAM A NORMA**

Veja-se como exemplo apenas as *projeções ortogonais* sobre os planos coordenados.

**Tabela 6-2: Projeções ortogonais sobre os planos coordenados**

|  |  |
| --- | --- |
| OPERADOR | MATRIZ CANÔNICA |
| Projeção ortogonal sobre o plano *xy*  *T(x, y, z) = (x, y, 0)* |  |
| Projeção ortogonal sobre o plano *xz*  *T(x, y, z) = (x, 0, z)* |  |
| Projeção ortogonal sobre o plano *yz*  *T(x, y, z) = (0, y, z)* |  |

Exercício: Encontre a imagem do vetor ***x*** *= (–1, 2, 4)* pela projeção ortogonal no plano *z = 0*

**Resposta**: *T(x) = (–1, 2, 0)*

**OPERADORES QUE PRESERVAM A NORMA**

As matrizes ortogonais *3×3* correspondem a operações lineares de *R3* que podem ser *rotações em torno de retas pela origem* ou *reflexões em planos pela origem*. Se *A* é a matriz ortogonal, então, se *det(A) = 1*, ela representa uma rotação; se *det(A) =* –*1*, ela representa uma reflexão.

Refexões em planos pela origem:

As reflexões mais básicas são aquelas realizadas nos planos coordenados cujas matrizes canônicas são dadas na tabela 6-3.

**Tabela 6-3: Reflexões em planos coordenados**

|  |  |
| --- | --- |
| OPERADOR | MATRIZ CANÔNICA |
| Reflexão no plano *xy*.  *T(x, y, z) = (x, y, –z)* |  |
| Reflexão no plano *xz*.  *T(x, y, z) = (x, –y, z)* |  |
| Reflexão no plano *yz*.  *T(x, y, z) = (–x, y, z)* |  |

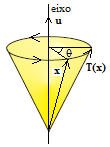
Exercício: Encontre a imagem do vetor ***x*** *= (–1, 2, 4)* pela reflexão no plano *x = 0*

**Resposta**: *T(x) = (1, 2, 4)*

Rotação no R3:

Uma rotação no *R3* é um operador ortogonal sobre uma reta de pontos fixos, denominada *eixo de rotação*. Para simplificar, Serão estudadas somente rotações em torno de retas pela origem.

A orientação ***u*** do eixo de rotação, vista na figura 6-15, é escolhida tal que as rotações pareçam *anti-horárias* quando vistas a partir do ponto final de ***u***, como acontece com as orientações dos eixos coordenados quando se usa a regra da mão direita.



**Fig. 6-15: Rotações em torno de uma reta pela origem.**

As rotações mais básicas são em torno dos eixos coordenados conforme mostra a tabela 6-4. Para se obter as matrizes canônicas dessa tabela basta realizar as rotações dos vetores canônicos em torno dos eixos *x*, *y* e *z*.

**Tabela 6-4: Rotação em torno dos eixos coordenados**

|  |  |
| --- | --- |
| OPERADOR | MATRIZ CANÔNICA |
| Rotação em torno do eixo *x* positivo |  |
| Rotação em torno do eixo *y* positivo |  |
| Rotação em torno do eixo *z* positivo. |  |

Exercício: Encontre a imagem do vetor ***x*** *= (1, 1, 1)* pela rotação em *R3*, em torno do eixo positivo *z*, por um ângulo de *60º*

**Resposta**: *(–0,37; 1,37; 1)*

Rotações arbitrárias

Uma análise completa de rotações quaisquer envolve muitos detalhes para ser apresentado aqui. Então, serão abordados apenas dois dois problemas básicos importantes:

1) Encontrar a matriz canônica, dado o eixo e o ângulo de rotação.

2) Dada a matriz canônica, encontrar o eixo e o ângulo de rotação.

A solução do primeiro problema é dada pelo teorema a seguir:

Teorema: Se ***u*** *= (a, b, c)* é o vetor unitário de orientação do eixo de rotação, então a matriz canônica *R****u****,θ* da rotação pelo ângulo *θ* em torno do eixo pela origem com orientação ***u*** é dada por:

*R****u****,θ =*  (6-13)

A solução do segundo problema é resolvida utilizando-se a equação (6-14) que fornece o ângulo de rotação e a equação (6-15), conhecida como fórmula de Dan Kalmann, que dá o eixo de rotação.

 (6-14)

***u*** *= A****x*** *+ AT****x*** *+ [1 – tr(A)]****x*** (6-15)

onde *A* é a matriz de rotação e ***x*** é qualquer vetor não-nulo de *R3* que não seja ortogonal ao eixo de rotação.

Exemplo 13: Mostre que a matriz  representa uma rotação em torno de uma reta pela

origem de *R3*. Encontre o eixo e o ângulo de rotação.

Solução: Como *tr(A) = 0*, então utilizando-se a equação (6-14) encontra-se:

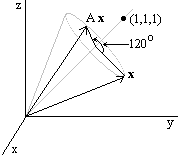
*cos θ = – ½ θ = 120º*

Para se utilizar a equação (6-15), escolhe-se um vetor ***x*** não ortogonal a ***u***. Seja, por exemplo, ***x*** *= (1, 0, 0)*. Então encontra-se que:

***u*** *= (1, 1, 1)*

que dá então, o eixo com sua respectiva orientação.

A figura 6-16 mostra o resultado dessa rotação.



**Fig. 6-16: Rotação de *120º* em torno de um eixo.**

Exercícios:

1) Usando as equações (6-14) e (6-15), encontre o ângulo e o eixo de rotação no R3 dado a matriz canônica:



**Resposta**: ***u*** *= (a, 0, 0) com a > 0 e θ = 90º*

2) Repita o exercício 1 para a matriz:



**Resposta**: ***u*** *= (0, 1, 0) e θ = 30º*

6.8 INVERSA DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Se *T: Rn → Rm* é uma transformação linear *injetora*, então cada vetor ***w*** é imagem de um único vetor ***x*** no domínio de *T*; dize-se que ***x*** é a *pré-imagem* de ***w***. Essa unicidade da pre-imagem nos permite criar uma função que leva ***w*** em ***x***, denominada a transformação inversa, denotada por *T–1*. Assim:

*T–1(****w****) =* ***x*** se, e só se, *T(****x****) =* ***w*** é injetora

O domínio de *T–1* é a imagem de *T* e a imagem de *T–1* é o domínio de *T*. Informalmente diz-se que *T* e *T–1* cancelam uma o efeito da outra.

Teorema: Se *T* é uma transformação linear injetora de *Rn*, então a matriz canônica de *T* é invertivel e sua inversa é a matriz canônica de *T–1*.

Exercício: Encontre a matriz inversa de alguns operadores lineares do *R2* vistos até agora. O que você observa no caso específico da reflexão por uma reta na origem?

**PROPRIEDADADES GEOMÉTRICAS DE OPERADORES LINEARES INVERTIVEIS DO R2**

As propriedades seguintes ajudam a determinar como tais operadores transformam regiões que são limitadas por polígonos.

(a) A imagem de uma reta é uma reta.

(b) A imagem de uma reta passa na origem se, e só se, a reta original passa pela origem.

(c) As imagens de duas retas são paralelas se, e só se, as retas originais são paralelas.

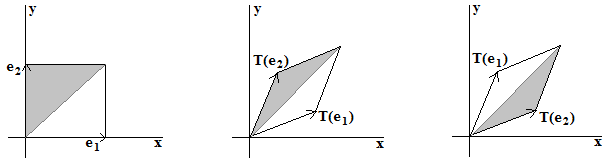
(d) As imagens de três pontos estão em uma reta se, e só se, os pontos originais estão numa reta.

(e) A imagem de um segmento de reta que liga dois pontos é o segmento de reta que liga as imagens desses dois pontos.

**IMAGEM DO QUADRADO UNITÁRIO**

Pelo teorema anterior, as imagens dos lados paralelos permanecem paralelas, então pode-se concluir que a imagem do quadrado unitário é um paralelogramo não degenerado que tem um vértice na origem e cujos lados adjacentes são *T(****e1****)* e *T(****e2****)*. Algumas imagens são mostradas na figura 6-17. Portanto, como a matriz canônica é denotada por *A = [T(****e1****) T(****e2****)]*, segue que:

*|det(A)| = área do paralelogramo de lados T(****e1****) e T(****e2****)*



**Fig. 6-17: Imagens do quadrado unitário.**

Exercício: Esboce a imagem do quadrado unitário pela multiplicação pelas matrizes abaixo e calcule a área do paralelogramo resultante.

**Resposta***: a) área = 3 b) área = 5*

6.9 APLICAÇÕES NA COMPUTAÇÃO GRÁFICA

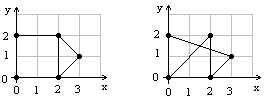
A área da computação gráfica se ocupa da exibição, transformação e animação de objetos bidimensionais e tridimensionais na tela do monitor de um computador. Nesta seção serão vistas apenas transformações matriciais que movem e/ou transformam objetos simples, compostos de segmentos de reta.

**ESTRUTURAS**

Os pontos, denominados de *vértices*, e os segmentos de retas que unem esses pontos, denominados de *arestas*, formam o que se denomina de *estrutura*.

Para um computador desenhar uma estrutura, precisa-se fornecer as coordenadas dos vértices junto com a informação de quais vértices são ligados por arestas.

A figura 6-18(a) mostra a estrutura de uma casa caída e a figura 6-18(b) tem os mesmos vértices da casa, mas ligados de maneira diferente.



(a) (b)

**Fig. 6-18: Exemplos de estruturas.**

**REPRESENTAÇÃO MATRICIAL**

Os vértices da estrutura são representados por vetores coluna para compor a *matriz de vértices*. Por exemplo, a matriz de vértices representando as estruturas da figura 6-18 é dada por:



A ordem em que os vértices são listados é irrelevante.

As informações de como os vértices estão conectados, podem ser armazenadas numa *matriz de conexões* *C* de tamanho *n×n*, onde *n* é o número de vértices, na qual a entrada da linha *i* e coluna *j* é *1* se o vértice da *i-ésima* linha de *C* está conectado ao vértice da *j-ésima* coluna de *C* e é *0,* caso contrário. Por exemplo, a matriz de conexões da estrutura da figura 6-15(a) é dada por:

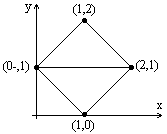


OBSERVAÇÃO: As matrizes de conexões são sempre simétricas. Assim, para economia de espaço em disco do computador, precisa-se armazenar apenas as entradas acima ou abaixo da diagonal principal.

Exemplo 14: Esboce a estrutura cujas matrizes de vértices e conexões são:



Solução: A estrutura é mostrada na figura 6-19.



**Fig. 6-19: Estrutura do exemplo 19.**

**TRANSFORMANDO ESTRUTURAS**

Agora, seja aplicar uma transformação linear à matriz de vértices de uma estrutura supondo que sua matriz de conexões é conhecida e que as ligações dos vértices transformados são descritas pela mesma matriz de conexões.

Exemplo 15: Seja colocar de pé a casa deitada da figura 6-18(a), resultando na figura 6-20. Para isso, precisa-se fazer uma rotação no sentido anti-horário de seus vértices por *90º*. A matriz canônica dessa rotação é:

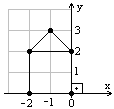


A nova matriz de vértices obtida é:



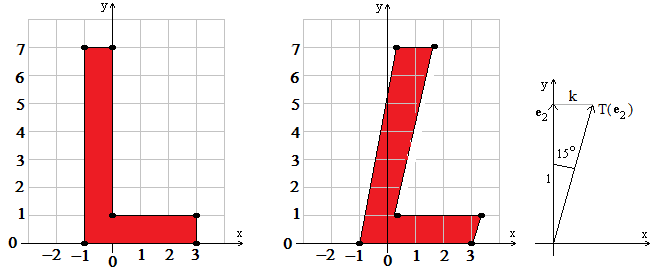


O que confere com a figura 6-20.



**Fig. 6-20: Rotação da estrutura da figura 6-18(a).**

Exemplo 16: Os caracteres usados em telas de monitores em geral têm uma versão vertical (romana) e uma versão inclinada (itálica). A versão itálica é obtida pelo cisalhamento da versão romana. Por exemplo, a figura 6-21(a) mostra a estrutura da letra L *romana* e a figura 6-21(b) mostra a versão *itálica* obtida pelo cisalhamento na direção positiva *x* por um ângulo de *15º*. Encontre os vértices do *L* itálico com duas casas decimais de precisão.



(a) (b) (c)

**Fig. 6-21: Exemplo de cisalhamento.**

A matriz de vértices do L *romano*, tirado a partir da figura 6-21(a) é:



Pela figura 6-21(c) vê-se que *T(****e2****) = (K, 1)*, então *k = tg(15º)*. Logo, a matriz do cisalhamento é dada por:



De modo que uma matriz de vértices do *L itálico* é



**TRANSLAÇÃO COM COORDENADAS HOMOGÊNEAS**

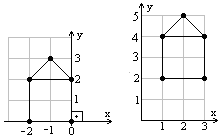
A translação é uma operação importante na computação gráfica. Entretanto ela não é uma operação linear e, portanto, não é um operador matricial, ou seja, não existe matriz *2×2* ou *3×3* que translade vetores em *R2* ou *R3* pela multiplicação matricial. Então, será preciso usar um artifício baseado no seguinte teorema relativo a matrizes em bloco:

Teorema: Se ***x*** e ***xo*** são vetores em *Rn* e se *In* é a matriz identidade *n× n*, então:



Esse teorema diz que modificando ***x***e***xo*** *+* ***x*** pela adjunção de um componente adicional igual a *1,* existe uma matriz *(n + 1)×(n + 1)* que transforma o vetor ***x***modificado no vetor ***xo*** *+* ***x*** modificado pela multiplicação matricial. Então, dado um vetor ***x*** *= (x1, x2, ..., xn)* em *Rn*, diz-se que o vetor *(x1, x2, ..., xn, 1)* modificado em *Rn+1* representa o vetor ***x*** em *coordenadas homogêneas*.

Exemplo 17: Use multiplicação matricial para transladar a casa de pé da figura 6-22(a) para a posição mostrada na figura 6-22(b).



(a) (b)

**Fig. 6-22: Exemplo de translação de uma estrutura.**

Solução: A matriz de vértices da casa de pé é:



Para transladar a casa à posição desejada precisa-se transladar cada vetor coluna de *V* por:

***xo*** *=* 

Pelo teorema anterior, essas translações podem ser obtidas em coordenadas homogêneas pela multiplicação com a *matriz de translação* dada por:

*T =*

Convertendo-se os vetores-coluna de *V* para coordenadas homogêneas, pode-se transladar todos os vértices de uma vez com a única multiplicação matricial:



Ignorando a última linha dessa matriz, tem-se a matriz de vértices da casa transladada:



Um problema com a translação ainda persiste: por exemplo, uma rotação em *R2* é executada por uma matriz *2×2*, enquanto uma translação necessita de uma matriz *3×3*. Uma saída para isso é executar todas as transformações básicas em coordenadas homogêneas. O próximo teorema permite fazer isso:

Teorema: Se *A* é uma matriz *n× n* e ***x***é um vetor em *Rn* dado em forma de coluna, então:



Exemplo 18: A figura 6-22(b) pode ser vista como uma seqüência de transformações das figuras 6-18(a) e 6-20, ou seja, uma rotação seguida de uma translação. Para compor essas transformações usando uma única multiplicação matricial em coordenadas homogêneas, deve-se primeiro expressar a matriz de rotação por:



Como a matriz da translação é:

*T =* 

A composição da translação com a rotação pode ser executada em coordenadas homogêneas como segue:

*TR90 =*

*TR90V =* 

Assim, descartando-se a última linha obtém-se os vértices da estrutura desejada.

OBSERVAÇÃO: Existem muitas aplicações nas quais se está interessado em rotações em torno de outros pontos, não só a origem, ou reflexões em retas que não passam pela origem. Tais transformações não são lineares, mas podem ser efetuadas pela multiplicação matricial em coordenadas homogêneas.

Exemplo 19: Uma rotação em torno do ponto ***x0*** *= (x0, y0) ≠ (0, 0)*, por um ângulo *θ* é a seguinte: primeiro translada-se *R2* por ***–x0*** para trazer o ponto para à origem, depois efetua-se a rotação em torno da origem e finalmente translada-se o vetor rotacionado para ***x0***. Assim, a *matriz canônica composta* obtida será:



Exercícios:

1) Use a idéia do exemplo 19 para encontrar a matriz canônica da reflexão pela reta que passa pelo ponto ***x0*** *= (x0, y0) ≠ (0, 0)*, que forma um ângulo *θ* com o eixo positivo *x*.

2) Encontre a imagem do ponto *(3, 4)* pela reflexão na reta que passa pelo ponto *(1, 2)* e tem coeficiente angular *m = ½.* A matriz de reflexão em função de *m* é:



**Resposta**: *(19/5, 12/5)*

No caso das transformações que provocam mudança de escala, como a expansão ou compressão vistas anteriormente, toma-se a origem como centro da mudança de escala. Contudo, também existem mudanças de escalas não lineares de *R2* a partir de um ponto fixo ***x0*** *= (x0, y0) ≠ (0, 0)*. O procedimento para essas transformações segue a mesma idéia do exemplo 19.

Exercício: Usando a ideia do exemplo 19, mostre que a transformação *T(x, y) = (k1x, k2y)* quando realizada a partir de um ponto fixo *(x0, y0)* qualquer pode ser dada por:

*T(x, y) = (x0 + k1(x – x0), y0 + k2(y – y0))*

(\*) 6.10 ROTAÇÃO DAS CÔNICAS

Já foi visto no capítulo 3 que a forma quadrática *Ax2 + By2 + 2Cxy = k* representa uma cônica (exceto a parábola) central e que a presença do termo misto consiste numa rotação dessa cônica. Sua forma matricial, como foi visto é:

***x****TS****x*** *= k*

Com o intuito de simplificar essa equação de tal forma que o termo misto desapareça, pode-se fazer uma mudança de variável baseada no *teorema dos eixos principais*:

Teorema: Se *S* é uma matriz simétrica *n×n*, então existe uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática ***x****TS****x*** na forma quadrática ***x`****TD****x`*** sem termos mistos.

Essa mudança é obtida fazendo-se ***x*** *= P****x`***, onde *P* é a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz *A*, de tal forma que:

***x****TS****x*** *=* ***x`****TD****x` =*** *λ1x1`2 + λ2x2`2 + … + λnxn`2*

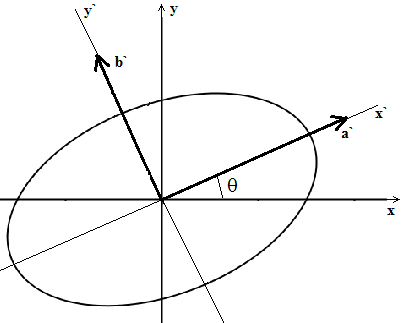
onde *λ1, λ2, … , λn* são os autosvalores da matriz *S*. Assim, no caso das cônicas no *R2*, fica-se com a equação:



ou

*λ1x`2 + λ2y`2 = k*

Que representa uma rotação dos eixos conforme ilustra a figura 6-23 para o caso de uma elipse. O vetor *a`* é o autovetor unitário para *λ1* e *b`* é o autovetor unitário para *λ2.*



**Fig. 6-23: Rotação de eixos para tornar a cônica na posição canônica.**

Dividindo-se a última equação por *k* obtém-se a forma básica da cônica centrada na posição canônica, ou seja,



Onde



No caso da elipse, portanto, *a* é o semieixo maior e *b* é o semi-eixo menor.

Para se obter o ângulo de rotação *θ* usa-se a matriz ortogonal *P* com d*et(P) = 1* e faz-se a comparação com a matriz de rotação do *R2*.

Exemplo 20: Identifique a cônica de equação *5x2 – 4xy + 8y2 – 36 = 0*, girando os eixos *xy* até colocar a cônica na posição canônica e encontre o ângulo pelo qual foram girados os eixos.

Solução: A equação dada pode ser escrita na forma matricial ***x****TS****x*** *= 36*, onde:

A equação característica de *S* é *(λ – 4)( λ – 9) = 0*. Portanto:

Para *λ1 = 4* temos ***p1*** *= (2/√5, 1/√5)* e

Para *λ2 = 9* temos ***p2*** *= (–1/√5, 2/√5)*

e



Onde, por acaso, *det(P) = 1*, o que representa uma rotação. Se desse *–1*, bastaria permutar as colunas de *P*.

A matriz *S* é diagonalizável com *D = diag(4, 9)*. Então, a equação matricial agora fica:



Ou



Esta última equação mostra que se tem uma elipse central com eixo maior de comprimento *2α = 6* ao longo de *x`*, e eixo menor de comprimento *2β = 4* ao longo de *y`*.

O ângulo de rotação dos eixos pode ser determinado comparando-se a matriz *P* com a matriz de rotação do *R2*. Donde se tira:

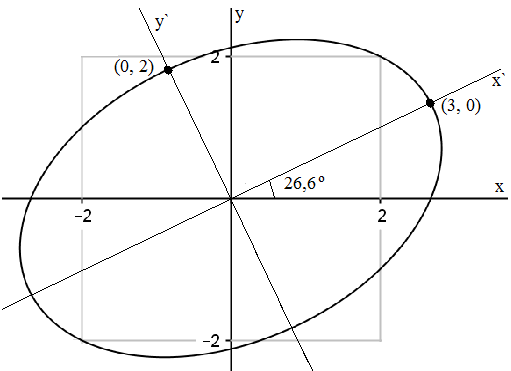


Logo, θ = tg*–1( ½) = 26,6o*

Ou, pode ser mostrado que o ângulo de rotação pode ser dado por:

*tg(2θ) = 2C/(A – B)*

A figura 6-24 mostra um esboço dessa elipse.



**Figura 6-24: Elipse do exemplo 27.**

Exercício: Identifique a cônica de equação 2*x2 – 4xy – y2 + 8 = 0*, girando os eixos *xy* até colocar a cônica na posição canônica e encontre o ângulo pelo qual foram girados os eixos.

**Resposta:** *H*ipérbole central *2y`2 – 3x`2 = 8, θ = 26,6º*

**CAIXA DE FERRAMENTAS**



TRANSFORMAÇÃO LINEAR: *T(****x****) = A****x,*** sendo *A* a matriz de transformação e ***x*** o vetor coluna a ser transformado

MATRIZ CANÔNICA DE UMA TRANSFORMAÇÃO:

*A =* [*T*(***e1***) *T(****e2***) *... T*(***en***)], onde ***e1****,* ***e2*** ... ***en*** são os vetores canônicos

ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES DO R2:

Rotação: *T(x, y) = R****x*** *=* , Reflexão: *T(x, y) = H****x*** *=* ,

Projeção: *P(x,y ) = P****x*** *= ,* Homotetia: ,

Expansão ou compressão: na direção *x*: , na direção *y*:

Cisalhamento: na direção *x*: , na direção *y*:

MATRIZ DE ROTAÇÃO EM TORNO DOS EIXOS *x*, *y* e *z*:

Em x: , Em y: , Em z:

**PROBLEMÁTICA**

1) Seja *T: V→ W* uma transformação linear. Mostrar que:

(a) *T(–****v****) = –T(****v****)*

(b) *T(****u*** *–* ***v****) = T(****u****) – T(****v****)*

2) Mostrar que a transformação abaixo é linear

*T: R2 → R2* definida por *T(x, y) = (3x + y, 2x – 2y)*

3) Seja o operador linear no *R3* definido por

*T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y – z, –x + y + 4z)*

(a) Determinar o vetor ***u*** *∈ R3* tal que *T(****u****) = (–1, 8, –11)*

(b) Determinar o vetor ***v*** *∈ R3* tal que *T(****v****) =* ***v***

4) Se *T(x1, x2, x3) = (x1 + 2x2, x1 – 2x3)*, encontre o domínio de *T* e a imagem de ***x*** *= (0, –1, 4)* por *T*.

5) Seja a transformação *T* cuja matriz canônica *A* é dada. Encontre se houver um vetor ***x*** cuja imagem por *T* é o vetor ***b***.



6) Nas matrizes ortogonais a seguir, determine se a multiplicação por *A* é uma rotação em torno da origem ou uma reflexão numa reta pela origem. Encontre o ângulo de rotação ou o ângulo que a reta faz com o eixo positivo *x*.

(a)  (b) 

(c)  (d) 

7) Esboce a imagem do retângulo de vértices *(0, 0), (1, 0), (1, 2)* e *(0, 2)* pelas seguintes transformações

(a) Reflexão no eixo *x*

(b) Reflexão no eixo *y*

(c) Compressão na direção *y* de razão *1/4*

(d) Expansão na direção *x* de razão *3*

(e) Cisalhamento na direção *x* de razão *3*

(f) Cisalhamento na direção *y* de razão *2*

8) Use a multiplicação matricial para encontrar a reflexão do vetor *(2, 5, 3)* no plano:

(a) *xy* (b) *xz* (c) *yz*

9) Use a multiplicação matricial para encontrar a projeção ortogonal do vetor *(–2, 1, 3)* no plano:

(a) *xy* (b) *xz* (c) *yz*

10) Encontre a matriz canônica do operador linear que efetua a rotação em *R3* pelo ângulo:

(a) *90º* em torno do eixo *x* positivo

(b) *90º* em torno do eixo *y* positivo

(c) *–90º* em torno do eixo *z* positivo

11) Use a multiplicação matricial para encontrar a imagem do vetor *(–2, 1, 2)* pela rotação por um ângulo de *30º* em torno do eixo *x* positivo.

13) Esboce a estrutura cujas matrizes de vértice e conexões estão dadas a seguir

(a) 

(b) 

14) Qual é a transformação linear *T:R2 🡪 R3* tal que *T(1, 1) = (3, 2, 1)* e *T(0, –2) = (0, 1, 0)?*

15) No plano uma rotação anti-horária de *45º* é seguida por uma ampliação de fator *√2*. Ache a matriz canônica que representa essa transformação.

16) Sabendo que as matrizes ortogonais preservam a norma, o que pode ser dito sobre seu autovalor *λ*?

17) Encontre a matriz do cisalhamento na direção *x* que transforma o triângulo de vértices *(0, 0), (2, 0)* e *(3, 3)* em um triângulo retângulo com ângulo reto na origem.

18) Mostre que uma rotação pela origem de um ângulo *θ1* seguida de uma outra rotação pela origem de um ângulo *θ2*, equivale a uma única rotação pela origem de um ângulo *(θ1 + θ2)*.

19) Encontre as únicas matrizes de rotação e de reflexão que são matrizes diagonais.