CAPÍTULO 3

MATRIZES E ÁLGEBRA MATRICIAL

3.1 EXEMPLOS DE MATRIZES

Uma matriz é um arranjo retangular de números geralmente com algum significado para algum tipo de aplicação.

Exemplo 1: *Informações tabulares*: Seja o número de roupas vendidas por tamanho, de uma loja de departamentos, no mês de junho, representado pela tabela 3-1

**TABELA 3-1: Vendas de roupas no mês de junho**

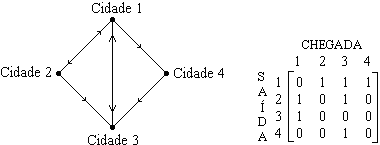
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | P | M | G |
| CAMISAS | *45* | *60* | *75* |
| CALÇAS | *30* | *30* | *40* |
| BERMUDAS | *12* | *65* | *45* |

Abstraindo-se as legendas pode-se representar esta tabela pela matriz:

Além de descrever *informações tabulares*, as matrizes são úteis para descrever *conexões entre objetos* como, por exemplo, conexões entre cidades por linhas aéreas, conexões entre elementos de um circuito etc.

Exemplo 2: *Conexões entre objetos*: A figura 3-1 mostra um grafo que descreve a existência de viagens aéreas entre quatro cidades, de uma determinada companhia aérea. As setas nas arestas distinguem entre conexões de ida e de volta ou só de ida. Este tipo de grafo (com setas) é dito *grafo orientado*.

Um grafo orientado pode ser descrito por uma matriz *n*×*n* denominada *matriz de incidência (ou de adjacência)*, onde a entrada *a*ij pode ser *1 (um)* se existir uma conexão do vértice *i* para o vértice *j* ou *0 (zero)* se não existir uma conexão.



(a) (b)

**Fig. 3-1 (a) Grafo orientado; (b) Matriz de adjacência**

Teorema: Se *A* é uma matriz de adjacência, então a entrada na posição *ij* de *An* é o número de maneiras diferentes de ir do vértice *i* para o vértice *j* passando por (*n – 1*) vértices intermediários.

Por exemplo, utilizando a matriz correspondente ao grafo da figura 3-1, as entradas da matriz *A3* mostrada abaixo, fornecem o número de maneiras distintas de se viajar entre duas cidades, passando por duas cidades intermediárias.

Matrizes também são usadas, por exemplo, para resolver sistemas de equações lineares; para armazenar e manipular informações num computador; para fazer transformações lineares ou ainda como ferramentas na representação e transmissão de imagens e sons digitalizados.

Neste capítulo as matrizes serão consideradas como *objetos matemáticos próprios*, abstraindo-se de qualquer aplicação e serão definidas algumas operações básicas sobre elas.

**NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA**

Matriz é um arranjo retangular de números denominados de *entradas*, de dimensão *m*×*n*, onde *m* é o número de linhas e *n* é o número de colunas da matriz. Alguns exemplos são mostrados a seguir:

Exemplo 3: Exemplos de matrizes de diversas dimensões.



Matriz 2×3 Matriz 3×2 Matriz 1×3 Matriz 3×1 Matriz 3×3

Em geral, uma matriz *A*, de dimensão *m*×*n* é denotada conforme equação (3-1), onde *a*ij representa a entrada que está na linha *i* e coluna *j* da matriz. O número de linhas é dado por *m* e o número de colunas é dado por *n*.

 (3-1)

Ou abreviadamente por: *Am×n*  = [*a*ij]

com *i = 1,2,..., m* e *j = 1, 2, ..., n*, onde *i* e *j*

Se *m = n*, a matriz é dita *quadrada*. Neste caso, as entradas *a11, a22, ..., ann* formam o que se denomina de *diagonal principal*. A quinta matriz do exemplo 3 é uma matriz quadrada *3×3* (ou de *ordem 3*) onde a diagonal principal é formada pelas entradas *5, 2 e 8*.

Também se utiliza a notação (*A*)*ij* para denotar o valor da entrada na linha *i* e coluna *j*. Assim, considerando-se a primeira matriz do exemplo 3, tem-se:

(*A*)*11 = –1,* (*A*)*12 = 2,* (*A*)*13 = 0,* (*A*)*21 = 5,* (*A*)*22 = –4* e(*A*)*23 = 7*

**MATRIZ NULA**

Uma matriz, de *qualquer ordem*, cujas entradas são todas nulas é denominada de matriz nula e será denotada pela letra maiúscula *O*.

**MATRIZ-LINHA E MATRIZ-COLUNA**

Uma *matriz-linha* é uma matriz de dimensão *1×n*, com uma única linha e *n* colunas, também vista como um *vetor-linha*. Uma *matriz-coluna* é uma matriz de dimensão *m×1*, *m* linhas e uma única coluna, também vista como um *vetor-coluna*.

Exemplo 4: *Matriz de vetores*: Dada a matriz de dimensão *3×4* abaixo



Pode-se ver esta matriz como uma lista de vetores-linha ou uma lista de vetores-coluna, ou seja, matriz *A* pode ser subdividida em vetores-linha e representada pela matriz coluna:

 onde: ***r1*** *=* [*1 2 –3 4*]*,* ***r2*** *=* [*–2 0 2 5*] e ***r3*** *=* [*0 3 –1 7*]

ou *A* pode ser subdividida em vetores-coluna e representada pela matriz linha:



onde: 

3.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

**IGUALDADE DE MATRIZES**

Duas matrizes são *iguais* se elas tiverem as mesmas dimensões e suas entradas de mesma posição são iguais. Em notação matricial tem-se:

Se *Am×n =* [*aij*] e *Bp×q =* [*bij*], então, *A = B* se, e só se: *m = p*, *n = q* e, além disso: aij = bij para todo *i = 1,2,..., m* e *j = 1,2,...,n*.

Exemplo 5: Dadas as matrizes a seguir, encontre os valores de *x*, *y*, *z* e *w* para que *A = B*.

Solução: Se *A = B*, então igualando as entradas correspondentes, monta-se os sistemas:

*x + y = 3 2z + w = 7*

*x – y = 1* *z – w = 5*

Donde se tira: *x = 2, y = 1, z = 4* e *w = –1*

**ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO**

Se *A* e *B* são matrizes de mesmas dimensões, então, as matrizes resultantes da soma ou da subtração terão as seguintes entradas:

(*A + B*)*ij =* (*A*)*ij +* (*B*)*ij = aij + bij*. Para a adição. (3-2)

(*A – B*)*ij =* (*A*)*ij –* (*A*)*ij = aij – bij*. Para a subtração. (3-3)

**MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR**

Se *A* é uma matriz e *λ* é um escalar, então a matriz *λA* é uma matriz com entradas:

(*λA*)ij = *λ*(*A*)ij = *λa*ij (3-4)

Exercício: Dadas as matrizes a seguir, encontre: (a) *A + B* (b) *2A – 3B*.

Propriedades: Se *A*, *B* e *C* são matrizes quaisquer, *O* é a matriz nula e *s* e *t* são escalares, então:

(I) *(A + B) + C = A + (B + C)* (II) *A + O = O + A = A*

(III) *A + (–A) = (–A) + A = O* (IV) *A + B = B + A*

(V) *s*(A + B) = *s*A + *s*B (VI) *(s + t)A = sA + tA*

(VII) *stA = s(tA)*

**MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES**

Multiplicar duas matrizes de mesmas dimensões, do mesmo modo como se fez com a adição, ou seja, multiplicando as entradas correspondentes, não traz muita utilidade prática. Uma definição que é mais adequada a várias aplicações, porém mais complexa, vem do contexto de sistemas lineares.

Seja começar sua definição por um caso particular que é o produto de uma matriz linha, *A* = [*a*j] de *n* entradas, por uma matriz coluna, *B* = [*b*i] de *m* entradas, com *n = m*. O resultado será um escalar (ou uma matriz *1×1*) dado por:

*a*1*b*1 *+ a*2*b*2 *+ ... a*n*b*n = . (3-5)

Observe que este produto é idêntico a um produto escalar, tendo *A* e *B* como vetores. Este produto é chamado de *produto interno* de *A* com *B*. Entretanto, se for invertida a ordem do produto, isto é, se for multiplicada uma matriz coluna por uma matriz linha, o resultado não é mais um escalar. Neste caso, o produto é chamado de *produto externo* de *A* com *B*.

Exercício: Encontrar o produto da matriz-linha cujas entradas são: *7, –4, 5*, pela matriz-coluna cujas entradas são: *3, 2, –1*.

**Resposta**: [*8*]

Agora, seja definir o caso geral de multiplicação de matrizes considerando as seguintes dimensões para elas: *Am×p* *=* [*aij*] e *B p×n* *=* [*bij*], tais que o número de colunas de *A* é igual ao número de linhas de *B*, ou seja, *A* tem dimensão *m×p* e *B* tem dimensão *p×n*. Então, o produto *C = AB* (nesta ordem) é a matriz de dimensão *m×n* cujas entradas *cij* são obtidas multiplicando-se a linha *i* de *A* pela coluna *j* de , isto é:

*C* *=* [*cij*], onde *c*ij *= a*i1*b*1j *+ a*i2*b*2j *+ ... + a*ip*b*pj =  (3-6)

Observe-se que, só é possível multiplicar duas matrizes se o número de colunas da 1ª matriz for igual ao número de linhas da 2ª matriz.

OBSERVAÇÃO: Se *AB = O****,*** onde *O* é a matriz nula, não se pode afirmar que *A = O* ou que *B = O*.

Exemplo 7: Encontrar o produto *AB* das matrizes:

Solução*:* Efetuam-se os produtos internos (linha de *A*×coluna de *B*) existentes, como segue:

*(AB)11 = 1(2) + 3(5) = 17 (AB)12 = 1(0) + 3(–2) = –6*

*(AB)13 = 1(–4) + 3(6) = 14 (AB)14 = 1(1) + 3(–1) = –2*

*(AB)21 = 2(2) + (–1)5 = –1 (AB)22 = 2(0) + (–1)(–2) = 2*

*(AB)23 = 2(–4) + (–1)6 = –14 (AB)24 = 2(1) + (–1)(–1) = 3*

Logo, tem-se:



Note-se que é possível encontrar qualquer entrada da matriz produto sem efetuar o produto matricial completo. Observe-se também que, neste exemplo, não é possível efetuar o produto *BA*. Por quê?

Exercícios

1) Encontre o produto da matriz coluna de entradas *1, 2, –3* e *4* pela matriz linha de entradas

*–1, 0, 3* e *2*, nessa ordem.

2) Encontre a matriz produto *AB* sendo 

OBSERVAÇÃO: A potência de matrizes segue a notação *An* que significa o produto da matriz por ela mesma *n* vezes.

Teorema: Se *A* é uma matriz *m×n*, então vale as seguintes relações para quaisquer *vetores-coluna* ***u*** e ***v*** em *Rn* e qualquer escalar *λ*:

(1) *A*(*λ****u***) *= λ*(*A****u***)

(2) *A*(***u*** *+* ***v***) *= A****u*** *+ A****v***

Propriedades do produto matricial: Sejam *A*, *B* e *C* matrizes e *λ* um escalar, então:

(I) *(AB)C = A(BC), nesta ordem.* (II) *A(B + C) = AB +AC*

(III) *(B + C)A = BA + CA* *(IV) (λA)B = A(λB)*

**MATRIZ TRANSPOSTA**

A transposta de uma matriz *A*, denotada por *AT* é a matriz obtida quando se permutam as linhas por colunas.

Exemplo 9: A transposta da matriz:

é a matriz:

OBSERVAÇÃO: a diagonal principal de *A* e de *B* continua a mesma.

Propriedades: Se *A* e *B* são matrizes e *λ* um escalar, então:

(I) *(A + B)T = AT +BT*  (II) *(AT)T = A*

(III) *(λA)T = λAT* (IV) *(AB)T =BTAT*

# TRAÇO DE UMA MATRIZ

Se *A* é uma matriz quadrada, então o *traço de A*, denotado por *tr(A)*, é a soma das entradas da diagonal principal, ou seja:

*tr(A) = a11 + a22 + ... + ann*. (3-7)

Exemplo 10: Considerando a matriz *A* do exemplo 9, encontra-se:

*tr(A) = 1 + 5 + 9 = 15*

Propriedades do traço: Se *A* e *B* são matrizes quadradas de mesmo tamanho e *λ* é um escalar, então:

(I) *tr(AT) = tr(A)* (II) *tr(λA) = λtr(A)*

(III) *tr(A + B) = tr(A) + tr(B)* (IV) *tr(A – B) = tr(A) – tr(B)*

(V) *tr(AB) = tr(BA)*

3.3 MATRIZ IDENTIDADE

A *matriz identidade,* *In×n,* ou simplesmente *In,* também chamada de *matriz unitária*, é a matriz *quadrada* com entrada igual a *1* em toda a diagonal principal e *zero* nas demais entradas, como mostra o exemplo abaixo para uma matriz *3×3 (I3)*.

Propriedades: Se *A* e *B* são matrizes quaisquer, λ um escalar e *I* a matriz identidade, então:

(I) Se *A* é uma matriz *quadrada* de mesma dimensão de *I*, então:

*AI = IA = A* e (*λI*)*A* = *λ*(*IA*) = *λA*

(II) Se *B* é uma matriz *m×n*, então

*BIn* *=ImB = B*

3.4 MATRIZ INVERTÍVEL (NÃO SINGULAR)

Uma matriz quadrada *A* é chamada de *inversível ou não singular* se existir uma matriz *A–1* tal que:

*A A–1 = A–1A = I* (3-8)

Tal matriz *A–1*, se existir, é única e é dita a inversa de *A.* Observa-se que a equação (4-8) é simétrica, isto é, se *A–1* é a inversa de *A*, então *A* é a inversa de *A–1*.

Exemplo 12: Sejam as seguintes matrizes



Então, como exercício, verifique que: *AA–1 = A–1A = I*

**INVERSA DE UMA MATRIZ *1× 1***

Se *A =* [*a*]*,* é fácil mostrar que *A–1 =* [*1/a*]

**INVERSA DE UMA MATRIZ *2×2***

Seja *A* uma matriz qualquer *2×2*, com vetores-linha ***r1*** *= (a, b)* e ***r2*** *= (c, d)*. Seja deduzir uma fórmula para a inversa *A–1*, com entradas *x1, y1, x2* e *y2*, tais que:

 ou, em forma de um sistema linear:

*ax1 + by1 =1, ax2 + by2 = 0*

*cx1 + dy1 = 0, cx2 + dy2 = 1*

Esses dois sistemas quando resolvidos fornecem:



ou



Onde *det(A) = ad – bc* é denominado de determinante da matriz *A*.

Assim, a matriz inversa de *A* será:

 (3-9)

Em resumo, se *det(A) ≠ 0*, a inversa de uma matriz de *2ª ordem* pode ser obtida da seguinte forma:

(1) Troquem de posição os dois elementos da diagonal principal.

(2) Mude o sinal dos dois outros elementos.

(3) Divida cada um dos elementos da nova matriz por *det(A)*.

Caso *det(A) = 0*, a matriz *A* não é invertível. Neste caso ela é chamada de *matriz singular*.

Exemplo 13: Determine a inversa das matrizes  e 

Solução: *det(A) = 2(5) – 3(4) = –2* . Como *det(A) ≠ 0*, a matriz *A* é invertível. Então:



*det(B) = 1(6) – 3(2) = 0*.

Como *det(B) = 0*, a matriz *B* não possui inversa, ou seja, a matriz *B é singular*.

Exemplo 14: Seja mostrar uma aplicação da matriz inversa para resolver o sistema abaixo em *x* e *y*:

*x – y = 3*

*x + 3y = –1*

Pode-se escrever o sistema na forma matricial como:

Multiplicando-se ambos os lados dessa equação pela matriz inversa dos coeficientes, tem-se:

Como o produto de uma matriz pela sua inversa é a matriz identidade, a equação acima fica:

🡪 🡪

Logo, encontra-se:

*x = 2* e *y = –1*

Teorema: Se *A* e *B* são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então o produto *AB* é invertível, e

*(AB) –1 = B–1A–1* (3-10)

3.4 UM MÉTODO SISTEMÁTICO PARA OBTER *A-1*

Nesta seção desenvolveremos um algoritmo que pode ser usado para encontrar a inversa de uma matriz de qualquer tamanho.

**OPERAÇÕES ELEMENTARES E MATRIZES ELEMENTARES**

OPERAÇÕES ELEMENTARES PARA SE OBTER UMA MATRIZ EQUIVALENTE POR LINHA

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são as seguintes:

[e1] Trocar de posição duas linhas da matriz. Indicamos isso por:

*Li ↔ Lj* (Lê-se: Permutar *Li* com *Lj*)

[e2] substituir uma linha por um múltiplo não nulo de si mesma. Indicamos por:

*kLi → Li* (Lê-se: *kLi* substitui *Li*)

[e3] substituir uma linha por um múltiplo de outra linha somada a si mesma. Indicamos por:

*kLi + Lj → Lj* (Lê-se: *kLi + Lj* substitui *Lj* )

MATRIZ ELEMENTAR

Definimos uma *matriz elementar* como uma matriz que resulta da aplicação de *uma única* *operação elementar* sobre as linhas de uma matriz identidade.

Teorema: Realizar uma operação elementar sobre uma matriz *A* de dimensão *m×n* é equivalente a obter a matriz elementar correspondente *E* a partir da matriz identidade *Im×m* e em seguida efetuar o produto *EA*.

Exemplo 15: Considere a matriz

Encontre uma matriz elementar *E* tal que *EA* é a matriz que resulta substituindo a segunda linha pela soma desta linha com *3* vezes a primeira.

Solução: A matriz *E* deve ser *2×2* para combinar com o produto EA. Assim, obtém-se *E* substituindo-se a segunda linha de *I* pela soma desta linha com *3* vezes a primeira. Isto dá:

Conferindo o produto *EA*, tem-se:

Portanto, a multiplicação por *E* equivale a realizar a mesma operação elementar diretamente sobre *A*.

MATRIZ ESCALONADA POR LINHA

É aquela matriz cuja primeira entrada não nula (*chamada de pivô*), de cada linha, está sempre à esquerda do pivô da linha posterior. E, se houver alguma linha nula, esta, sempre estará no final da matriz.

OBSERVAÇÃO: No caso particular em que todos os pivôs são unitários e, na coluna de cada um deles, as outras entradas forem nulas, diz-se que a matriz está *escalonada reduzida por linha* ou também chamada de *matriz canônica*.

Os exemplos a seguir mostram os dois tipos de matrizes:

A seguinte matriz está na forma escalonada por linha, onde os números em destaque (primeiro não nulo de cada linha) são chamados de pivôs.

A próxima matriz está na forma escalonada reduzida por linha (também chamada de matriz canônica)

**POSTO DE UMA MATRIZ**

O *posto de uma matriz A*, denotado por *rank*(*A*) ou *Pos*(*A*) é igual ao número de pivôs da matriz *A na* forma escalonada por linha. Assim, no exemplo anterior tem-se rank(*A*) *= 3.*

OBSERVAÇÃO: O posto de uma matriz nunca é maior que a menor dimensão da matriz. Por exemplo, se *A* é uma matriz *5×3*, então *Pos(A) ≤ 3*. A única matriz que tem posto nulo é a matriz nula.

Teorema: Uma matriz elementar é invertível e a sua inversa também é uma matriz elementar.

Teorema: Se *A* é uma matriz *n×n*, cuja forma escalonada reduzida por linha é a matriz identidade, *I*, então a matriz *A* pode ser expressa como o produto de matrizes elementares e *A* é invertível.

Matematicamente escreve-se:

*Ek ... E2E1A = I*

Ou *A = E1–1E2–1 ... Ek–1In = E1–1E2–1 ... Ek–1* (3-11)

**UM ALGORITMO PARA INVERSÃO DE MATRIZES**

Suponha-se que a matriz *A* esteja reduzida a matriz identidade *I* por uma sequência de operações elementares sobre as suas linhas e que a correspondente sequência de matrizes elementares é: *E1, E2, ..., Ek*. Então, tomando a inversa de ambos os lados da equação (3-11) e baseando-se no teorema anterior, obtem-se:

*A–1 = Ek ... E2E1*

Que também pode ser escrita como:

*A–1 = Ek ... E2E1I*

Isso mostra que a mesma seqüência de operações elementares sobre linhas que reduz *A* a *I* também fornece *A-1* a partir de *I*. Assim, tem-se o seguinte:

Algoritmo de inversão: Para se encontrar a inversa de uma matriz *A*, encontra-se a seqüência de operações elementares que reduz *A* a *I* e então efetua-se a mesma seqüência de operações em *I* para obter *A–1*.

Exemplo 16: Encontre a inversa da matriz

Solução: Uma maneira prática de executar o algoritmo é colocar a matriz identidade *I* ao lado da matriz *A* e aplicar as operações elementares simultaneamente em *A* e em *I*. Acompanhe a sequência de operações:













Assim:

OBSERVAÇÃO:

(1) Aplicando-se o algoritmo de inversão a uma matriz não invertível, em alguma etapa do processo obtém-se uma linha de zeros na matriz do lado esquerdo. Quando isso acontece, pode-se parar o processo e concluir-se que a matriz não é invertível.

(2) A notação *A–n* significa (*A–1*)*n*, ou seja, significa *A–1* multiplicada por ela mesma *n* vezes

3.5 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES QUADRADAS

Esta seção descreve certos tipos especiais de matrizes quadradas que serão úteis daqui para frente.

**MATRIZ DIAGONAL**

Uma matriz quadrada *D = [dij]* é *diagonal* se todos os elementos fora de sua diagonal principal forem nulos. Tal matriz pode ser denotada por:

*D = diag(d11, d22, ... dnn)*.

Exemplo 19: As seguintes matrizes são diagonais que podem ser representadas respectivamente por:

*diag(3, –7, 2) diag(4, –5) diag(6, 0, –9, 8)*.

**MATRIZ TRIANGULAR**

Uma matriz quadrada *A = [aij]* é *triangular superior* (também chamada de *matriz U*) se todas as suas entradas abaixo da diagonal principal forem iguais a *0*, isto é, *aij* *= 0* para *i* > *j*.

Uma matriz *triangular inferior* (também chamada de *matriz L*) é uma matriz quadrada cujas entradas acima da diagonal principal são todas nulas.

Exemplo 20: As matrizes *A* e *B* são triangulares superiores enquanto *C* e *D* são triangulares inferiores

Teorema: Sejam *A =* [*aij*]e *B =* [*bij*] duas matrizes triangulares (ambas superiores ou ambas inferiores) *n×n*. Então:

(I) *A + B, kA* e *AB* são triangulares (superiores ou inferiores) e suas diagonais são, respectivamente:

(*a11 + b11, ..., ann + bnn*), (*ka11, ..., kann*), (*a11b11, …, annbnn*).

(II) *A* é invertível se, e só se, na sua diagonal não houver nenhuma entrada nula. Se *A-1* existe, ela também é triangular.

(III) A transposta de uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular superior e vice-versa.

OBSERVAÇÃO: Este teorema vale também para a matriz diagonal já que ela também é triangular.

Exercício: Baseado apenas no teorema anterior, quais matrizes do exemplo 20 não são invertíveis?

**MATRIZ SIMÉTRICA E MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA**

(a) *Matriz simétrica*: uma matriz *A* é *simétrica* se *AT* = *A*.

Isto implica que *aij = aji*, ou seja, seus elementos simétricos são espelhados pela diagonal principal.

(b) Uma matriz é *antissimétrica* se *AT = –A*.

Isto implica que *aij = –aji* e *aii* *= 0* (as entradas da diagonal principal são todas nulas).

Exemplo 21: Considerando-se as matrizes a seguir, *A* é simétrica, *B* é antissimétrica e *C* não é nem simétrica nem antissimétrica, até porque *C* não é quadrada.

Teorema: Se *A* e *B* são matrizes simétricas de mesmo tamanho e se *λ* é qualquer escalar, então:

(1) *AT* é simétrica.

(2) *(A + B)* e *(A – B)* são simétricas. A recíproca não é verdadeira.

(3) *λA* é simétrica.

(4) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica se, e só se, as matrizes

comutam, ou seja, se *AB = BA*

(5) Se *A* é uma matriz simétrica invertível, então *A-1* é simétrica.

OBSERVAÇÃO: Podemos obter uma matriz simétrica *As*, a partir de qualquer matriz *A* fazendo:

*As = ½(A + AT)*

E uma matriz antissimétrica pode ser obtida, a partir de qualquer matriz *A*, fazendo:

*Aas = ½(A – AT)*

Se forem somadas as duas equações anteriores membro a membro, obtém-se a matriz *A* como sendo:

*A = As + Aas*

Ou seja, toda matriz pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

Exercícios:

1) Dada a matriz a seguir, escreva-a como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.



2) Mostre que se *A* é uma matriz *m×n*, então *AAT* e *ATA* são matrizes quadradas e simétricas.

**MATRIZ ORTOGONAL**

Uma matriz *A* é *ortogonal* se sua inversa for igual a sua transposta, isto é,

*A–1 = AT*

Mas, como *AA–1 = A–1A = I,* então *AAT = ATA = I*

Portanto, *A* precisa ser quadrada e invertível.

OBSERVAÇÃO: Se a igualdade *AAT = ATA* for satisfeita a matriz *A* é chamada de *normal*. Para que ela seja ortogonal, esta igualdade tem que resultar na matriz identidade *I*.

Exemplo 22: Seja a matriz . Multiplique *A* por *AT* para verificar que *A* é ortogonal.

Exercício: Encontre a inversa da matriz *A* do exemplo 22.

**Resposta:** *A–1 = AT*

Teorema: Seja *A* uma matriz real de tamanho *n×n*. A matriz *A* é ortogonal se os vetores linhas e os vetores colunas de *A* *são unitários e ortogonais dois a dois*.

Teorema: Seja *A* uma matriz *2×2* real e ortogonal. Então, para algum número *θ* essa matriz pode ser representada por:

 ou 

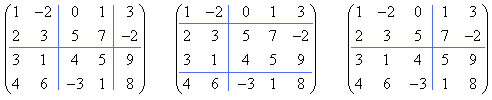
Exercício: Construa uma matriz ortogonal *2×2* cujo elemento *a11* vale *1/2*

(\*) 3.6 MATRIZ POR BLOCO OU MATRIZ PARTICIONADA

Já foi visto que se pode subdividir uma matriz em vetores-linha ou vetores-coluna. Nesta seção serão vistas outras formas de se subdividir uma matriz com o objetivo de isolar partes da matriz que podem ser importantes em problemas particulares ou para se quebrar uma matriz em pedaços menores que serão utilizados em cálculos de grande escala.

**MATRIZ EM BLOCOS ARBITRÁRIOS**

Usando-se um sistema de linhas pontilhadas horizontais e verticais pode-se criar partições arbitrárias em uma matriz *A*, chamadas *blocos ou células* de *A*, conforme exemplificado a seguir.

Dividindo-se, por exemplo, as matrizes *A* e *B*, em blocos, pode-se realizar operações em *A* e *B* tratando-se seus blocos como se fossem entradas das matrizes.

**MATRIZ QUADRADA POR BLOCOS**

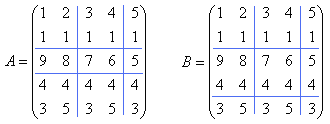
Seja *M* uma matriz por bloco. *M* é chamada de *matriz quadrada por bloco* se:

(1) *M* é uma matriz quadrada

(2) Os blocos formam uma matriz quadrada

(3) Os blocos da diagonal são também matrizes quadradas.

Exemplo 24: Considere as duas matrizes por bloco a seguir:



A matriz *A* não é quadrada por bloco, pois o segundo e o terceiro blocos da diagonal não são quadrados. Por outro lado, a matriz *B* é quadrada por blocos.

**MATRIZ DIAGONAL POR BLOCO**

Uma matriz *A* *=* [*Aij*] quadrada por blocos é uma *matriz diagonal por bloco* se todos os blocos fora da diagonal são matrizes nulas. Podem-se denotá-la por:

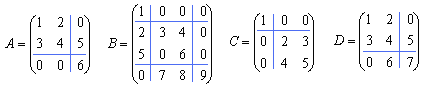
*A* = diag(*A11, A22, ..., Ann*)

Propriedade:

Se *A* é uma matriz diagonal por bloco então *A* é invertível se, e só se, cada bloco *Aii* é invertível e, neste caso, *A-1* é uma matriz diagonal por blocos.

As matrizes quadradas por blocos também podem ser triangulares por blocos como mostra o exemplo 25.

Exemplo 25: Determinar quais das seguintes matrizes quadradas por blocos são triangulares superiores, triangulares inferiores ou diagonais.



(a) *A* é triangular superior por blocos

(b) *B* é triangular inferior por blocos

(c) *C* é diagonal por blocos

(d) *D* não é nenhuma das três coisas.

Muitos algoritmos de computador para operar com matrizes grandes usam estruturas em bloco para quebrar os cálculos em pedaços menores. Por exemplo, considere uma matriz triangular superior em blocos da forma:



na qual *A11* e *A22* são matrizes quadradas. Então, pode-se mostrar que, se *A11* e *A22* são invertíveis, então *A* é invertível e pode ser dada por:

 (3-12)

Esta fórmula permite que o trabalho de inverter *A*, seja realizado por *processamento paralelo*, ou seja, utilizando-se processadores individuais que trabalham *simultaneamente* para calcular as inversas das matrizes menores *A11* e *A22* que depois são usadas na equação (3-12).

Note que se a matriz é diagonal por bloco, então pela equação (3-12) sua inversa é:



Se a matriz *A* for triangular inferior por bloco, sua inversa será:



Exercício:

Encontre a inversa da matriz

3.7 FATORAÇÃO DE MATRIZES

**MATRIZ DIAGONAL**

Se a matriz é diagonal, sua fatoração é baseada na propriedade do produto de matrizes diagonais. Por exemplo, para uma matriz *3×3* tem-se:



OBSERVAÇÃO: Para matrizes diagonais, a ordem do produto não importa.

Exercício: Fatorar as seguintes matrizes diagonais:

,

**FATORAÇÃO EM MATRIZES ELEMENTARES**

Qualquer matriz *2×2* que tenha inversa pode ser decomposta como o produto de matrizes elementares. A fatoração pode ser realizada através da eliminação de Gauss-Jordan para obter as matrizes elementares *E1, E2, ... En* e fazendo-se:

*A = E1–1E2–1 ... En–1*

Exercício: Decomponha a matriz em matrizes elementares.

**Resposta:** *A =*

**FATORAÇÃO LU**

O objetivo principal nesta seção é mostrar um método para fatorar uma matriz quadrada *A* na forma:

*A = LU*. (3-14)

onde *L* é uma matriz triangular inferior e *U* é uma matriz triangular superior.

Teorema: Se uma matriz quadrada *A* pode ser reduzida à forma escalonada por linhas com eliminação gaussiana sem permuta de linhas, então *A* tem uma decomposição *LU*. Para encontrá-la, siga os seguintes passos:

Passo1: Reduza *A* à forma escalonada por linhas *U* sem usar permutação de linhas e mantendo a contabilidade dos multiplicadores que foram utilizados para introduzir os pivôs e os multiplicadores que foram utilizados para introduzir os zeros abaixo dos pivôs.

Passo 2: Em cada posição ao longo da diagonal principal de *L* coloque o recíproco do multiplicador que introduziu o pivô naquela posição de *U*.

Passo 3: Em cada posição abaixo da diagonal principal de *L* coloque o negativo do multiplicador que introduziu o zero naquela posição de *U*.

Passo 4: Forme a decomposição *A = LU*

Exemplo 33: Encontre uma decomposição *LU* da matriz

Solução: A matriz *A* será reduzida à forma escalonada por linha *U* e, em cada passo, será preenchida uma entrada de *L*, de acordo com os passos descritos acima.













Note-se que, como já se tem um pivô na terceira linha de *L*, nenhuma operação a mais, precisa ser realizada, portanto:

*A = LU*

3.8 EQUAÇÃO MATRICIAL DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS QUADRÁTICAS

Equações algébricas do tipo:

*Ax2 + By2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0* (3-20)

onde *A, B, C, D, E* e *F* são constantes (com *A, B* e *C* não todos nulos) e *x* e *y* são as variáveis, é uma equação quadrática que pode ser representada na forma matricial como:

***x****TS****x*** *+ [D E]****x*** *+ F = 0*

onde ***x*** é o vetor coluna das variáveis *x* e *y,* e *M* é a matriz dos coeficientes dos termos quadráticos, vistos abaixo.

Observe-se que a matriz *S* *deve ser simétrica*. As entradas da diagonal são os coeficientes dos termos quadrados e a entrada fora da diagonal é metade do coeficiente do *termo misto*, *xy*.

A equação (3-20), com *A, B* e *C* não todos nulos, representa uma cônica.

Se *D = E = 0*, a equação reduz-se a:

*Ax2 + By2 + 2Cxy + F = 0*

que é uma cônica central. Essas Cônicas incluem as elipses e as hipérboles, mas não as parábolas. Além disso, se *C = 0,* tem-se a equação:

*Ax2 + By2 + F = 0*

que representa uma cônica central em posição canônica.

A presença do termo misto, ou seja, *C ≠ 0*, indica uma rotação da cônica em relação aos eixos canônicos, enquanto a presença dos termos lineares, isto é, *D ≠ 0* ou *E ≠ 0*, ou ambos, indica a presença de uma translação em relação aos eixos. Os casos de rotações serão estudados no capítulo 6.

Exemplo 35: Seja ***x*** o vetor coluna de componentes *x* e *y* e *S* uma matriz dada por:

Classifique e dê os elementos da cônica que está representada pela equação ***xT****S****x*** *= 16*.

Solução: Substituindo os dados fornecidos na equação matricial tem-se:



Que quando resolvida fornece a equação algébrica *x2 + 4y2 = 16*, ou



Que representa uma elipse central, com *a = 4, b = 2, c = 2√3* e *F(±2√3, 0)*

Exercício: Escreva a equação matricial que representa a hipérbole dada abaixo



**Resposta**: 

## CURIOSIDADES HISTÓRICAS

## 

## 

## CAIXA DE FERRAMENTAS

## 

TEOREMA: Se *A* é uma matriz *m×n*, então vale as seguintes relações para quaisquer *vetores-coluna* ***u*** e ***v*** em *Rn* e qualquer escalar *λ*:

(1) *A*(*λ****u***) *= λ*(*A****u***), (2) *A*(***u*** *+* ***v***) *= A****u*** *+ A****v***

TRAÇO DE UMA MATRIZ: *tr(A) = a11 + a22 + ... + ann*

INVERSA DE UMA MATRIZ 2×2:

Se , então:

MATRIZ SIMÉTRICA: *AT = A*, MATRIZ ANTISSIMÉTRICA: *AT = –A*

MATRIZ DIAGONAL: Todas as entradas acima e abaixo da diagonal são nulas

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR: Todas as entradas abaixo da diagonal são nulas

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR: Todas as entradas acima da diagonal são nulas

MTRIZ ORTOGONAL: *A–1 = AT* ou então *AAT = ATA = I*

## PROBLEMÁTICA

1) Dada as matrizes abaixo calcule as seguintes matrizes, quando for possível.

(a) *A + 2B* (b) *EG*  (c) *AE* (d) *AF*

2) Sem realizar o produto das matrizes *F* e *G* do problema 1, encontre:

a) *(FG)23* b) *(GF)21* c) *O 1o vetor-linha de FG*. d) *O 2o vetor-coluna de FG*.

3) Considerando as matrizes *C, D, F* e *G* do problema 1, encontre:

a) *tr(F)* b) *tr(D)* c) *tr(CD)* d) *tr(GF)*

4) Dada a matriz *M* abaixo, encontre os valores de *x, y, z* e *w* para que esta matriz seja simétrica.



5) Considerando o grafo da figura 3-1 encontre o número de maneiras de ir da *cidade 2* para a *cidade 3* passando por *duas* cidades intermediárias.

6) Sejam *C*, *D* e *E* as matrizes usadas no problema 1. Usando o menor número possível de operações, encontre a entrada na *linha 2* e *coluna 3* da matriz produto *C(DE).*

7) Classifique e dê a representação matricial de cada uma das cônicas abaixo

a) *2x2 – 4xy – y2 + 8 = 0*

b) *4x2 + 9y2 – 24x + 18y + 9 = 0*

c) *6y = x2 – 8x + 14*

8) Determine a inversa da matriz abaixo



9) Classifique e dê os elementos da cônica representada pela equação matricial abaixo



10) Decompor as matrizes abaixo como um produto de matrizes elementares



11) Encontre a inversa, se houver, das matrizes *C, D* e *G* do problema 1.

12) Classifique cada uma das cônicas dadas pela equação matricial ***x****TA****x*** *= k*, onde ***x*** é um vetor coluna de componentes *x* e *y* e, *A* e *k* são dadas abaixo



13) Sejam as matrizes *A = diag(2, 3, 5)* e *B = diag(7, 0, –4)*. Calcule:

a) *AB, A2, B2* b) *A-1* e *B-1*.

14) Determine uma matriz *A(2×2)* não nula, tal que *A2* é diagonal, mas *A* não.

15) Determine uma matriz triangular superior *A* tal que



16) Calcule uma matriz ortogonal *2×2* cuja primeira linha é um múltiplo positivo de *(3,4).*

17) Calcule uma matriz ortogonal *3×3* cujas duas primeiras linhas são múltiplos de ***u1*** *= (1, 1, 1)* e

***u2*** *= (0,-1,1)*, respectivamente.

(\*) 18) Seja *M = diag(A, B, C)* onde , , . Calcule *M2*.

(\*) 19) Dada a matriz , encontre a sua inversa.

(\*) 20) Use a equação (4-12) para encontrar a inversa da matriz triangular superior em blocos *A* dada por



21) Encontre o valor de *k* na equação:



22) Encontre a matriz *A* sabendo que sua inversa é 

23) Numa loja de departamentos, sabe-se que cada item do tipo 1 custa *R$ 2,00*, cada item do tipo 2 custa *R$ 5,00* e cada item do tipo 3 custa *R$ 10,00*. Além disso, sabe-se que a tabela abaixo descreve o número de itens de cada tipo que foram comprados durante os quatro primeiros meses do ano. Encontre: (a) o produto matricial que fornece as despesas com os três itens para cada mês; (b) o produto matricial que fornece o total de cada item comprado nos quatro meses; (c) o produto matricial que fornece o total de itens comprados em cada mês.

**TABELA**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | TIPO 1 | TIPO 2 | TIPO 3 |
| JAN | *3* | *4* | *3* |
| FEV | *5* | *6* | *0* |
| MAR | *2* | *9* | *4* |
| ABR | *1* | *1* | *7* |

24) Mostrar que se uma matriz quadrada *A*, não nula, satisfaz a relação *A2 + 2A + I = O*, onde *O* é a matriz nula e I é a matriz identidade, então *A* é invertível. Qual é a inversa de *A*?

25) A tabela abaixo fornece a quantidade das vitaminas *x*, *y* e *z* contidas em cada unidade dos alimentos I e II. Se for ingerida *5* unidades do alimento I e *2* unidades do alimento II, quanto será consumida de cada tipo de vitamina?

**TABELA 3-4: Consumo de vitaminas por alimento**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* | *z* |
| Alimento I | *4* | *3* | *0* |
| Alimento II | *5* | *0* | *1* |

26) Considerando o problema 26, se os custos dos alimentos dependerem somente do seu conteúdo vitamínico e sabendo-se que os preços por unidade de vitamina *x, y* e *z* são, respectivamente, *R$1,50*; *R$3,00* e *R$5,00*, quanto se pagaria pela porção de alimentos indicada anteriormente?

**Resposta**: *R$100,00*

27) Escreva a forma matricial de cada uma das equações quadráticas abaixo e diga que tipo de cônica ela representa.

**Resposta***: a) Parábola; b) Parábola; c) Elípse; d) Hipérbole; e) Elípse; f) Hipérbole.*

a) *4x2 – 16x – y + 15 = 0* b) *(y – 3)2 = –8(x – 1)* c) *16x2 + 9y2 – 96x + 72y + 144 = 0*

d) *9x2 – 4y2 – 18x – 16y – 43 = 0* e) *2x2 +4y2 – xy + 100 = 0*  f) 2*x2 – 2xy + 11 = 0*